ÜBER DAS NEUMANN-POINCARÉSCHE PROBLEM

FÜR EIN GEBIET MIT ECKEN

INAUGURAL-DISSERTATION

VON

TORSTEN CARLEMAN

UPPSALA 1916
ALMQVIST & WIKSELLS BOKTRYCKERI-A.-B.

ÜBER
DAS NEUMANN-POINCARÉSCHE PROBLEM
FÜR EIN GEBIET MIT ECKEN

INAUGURAL-DISSERTATION

ZUR

ERLANGUNG DER DOKTORWÜRDE

MIT GENEHMIGUNG

DER MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHEN SEKTION
DER WEITBERÜHMTEN PHILOSOPHISCHEN FAKULTÄT
ZU UPPSALA

ZUR ÖFFENTLICHEN BEURTEILUNG VORGELEGT

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

VON

TORSTEN CARLEMAN
LIC. PHIL., SMÅL.

DIE VERTEIDIGUNG WIRD AM 20. JANUAR 1917 UM 10 UHR VORMITTAGS
IM HÖRSAAL NR. XI STATTFINDEN

UPPSALA 1916
ALMQVIST & WIKSELLS BOKTRYCKERI-A.-B.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41523708_0023

EINLEITUNG.

Zur Lösung der Randwertaufgaben der Potentialtheorie besitzt man heute sehr verschiedene Methoden. Unter diesen geben wohl diejenigen den besten Aufschluss über die Eigenschaften der Lösungen, welche sie durch Potentiale der doppelten bzw. einfachen Schicht darzustellen suchen. Die erste Randwertaufgabe (Dirichletsches Problem) wurde zuerst von C. Neumann[1] durch ein Potential der doppelten Schicht gelöst. Er musste jedoch das Gebiet als konvex voraussetzen. Dass die Neumannsche Lösung auch auf nicht konvexe, stetig gekrümmte Flächen (Kurven) anwendbar ist, zeigte Poincaré in seiner Abhandlung: »La méthode de Neumann et le problème de Dirichlet» (Acta Mathematica Bd. 20). Diesen Untersuchungen schliessen sich Arbeiten von Zaremba, Korn und Stekloff an. Durch Anwendung der Poincaréschen Methoden gelang es Zaremba[2] das Problem für ein Gebiet mit Ecken zu lösen.

Nachdem die Theorie der linearen Integralgleichung durch Fredholm gegeben war, ergaben sich die Lösungen der ersten und zweiten Randwertaufgaben durch Potentiale der doppelten bzw. einfachen Belegung ganz unmittelbar für stetig gekrümmte Berandung.[3] Nähere Untersuchungen über diesen Gegenstand finden sich bei Plemelj (Monatsh. für Math. u. Physik XV u. XVIII, Preisschrift d. Jabl. Ges. 1911).

Wenn das Gebiet mit Ecken behaftet ist, erhält man eine Integralgleichung, die von einem singulären, der Fredholmschen Methode nicht zugänglichen Typus ist. Haupt-

[1] Ber. der Kgl. Sächs. Ges. der Wiss. 1872.

[2] Journal de Math. 1904.

[3] Stockholm. Översigt av Kongl. Vetenskapsakademiens Förhandlingar 1900.

zweck der vorliegenden Arbeit ist nun, diese Integralgleichung (im Falle des logarithmischen Potentials) für alle Werte des den Kern multiplizierenden Parameters λ zu behandeln.

In Teil I wird eine Zerlegung des Kernes in zwei andere vorgenommen, von denen der eine begrenzt ist, während der andere sich durch sukzessive Approximationen auflösen lässt. Auf diese Weise erhält man die Lösung der Integralgleichung, wenn $|\lambda|$ kleiner als eine gewisse Zahl R, grösser als Eins, ist. Insbesondere ergeben sich die Lösungen der obengenannten Randwertprobleme.

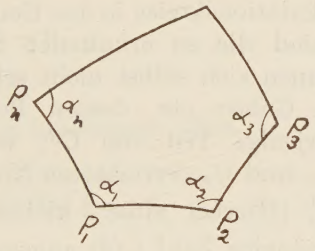
Im zweiten Teil wird zunächst die Aufgabe für ein Kreiszweieck gelöst. Mit Hilfe dieser Lösung lässt sich das allgemeine Problem erledigen. Der Übersichtlichkeit halber beschränken wir uns auf ein Gebiet mit einer einzigen Ecke.

Teil I.

§ 1.

Potentialtheoretische Hilfssätze.

Es sei T ein einfach zusammenhängendes Gebiet, dessen Berandung C aus einer endlichen Anzahl stetig gekrümmter Kurvenstücke bestehe, welche sich in den Ecken $P_1, P_2, \ldots P_n$ unter von 0 und 2π verschiedenen Winkeln $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ schneiden mögen. Die Bogenlänge t rechnen wir von einem Punkte des Segments $P_n P_1$ aus, und zwar so, dass sie zunimmt, wenn C im positiven Sinne umkreist wird. Die den Punkten $P_1, P_2 \ldots P_n$ entsprechenden Bogenlängen seien $s_1, s_2 \ldots s_n$. Der Abstand eines Punktes p der Ebene von einem Punkte t der Berandung sei r_{pt}.



Wir vollen zunächst einige Sätze aus der Potentialtheorie zusammenstellen, welche für das folgende von Bedeutung sein werden.

I. Wenn $f(s)$ für $s \neq s_i$ stetig ist und in der Umgebung der Punkte s_i einer Ungleichung

$$|s - s_i|^{\varkappa} f(s) < k \qquad \varkappa < 1$$

genügt, so ist

$$V(p) = \int_C f(t) \log \frac{1}{r_{pt}} dt$$

eine überall stetige Funktion von p.

Man erhält den Satz durch eine leichte Verallgemeinerung des gewöhnlichen Stetigkeitsbeweises für das Potential der einfachen Belegung.

II. Sei $f(s)$ für $s \neq s_i$ stetig, und es existiere auch $\int_C |f(s)|\,ds$. Alsdann gilt die GREENsche Formel

$$(1) \qquad V(p) = \frac{1}{2\pi}\int_C \left(V \frac{d \log \frac{1}{r_{pt}}}{dn} - \frac{dV}{dn} \log \frac{1}{r_{pt}} \right) dt$$

$\frac{d}{dn}$ möge die Ableitung nach der inneren Normalen bezeichnen.

Zum Beweise betrachten wir die folgendermassen definierten Parallelkurven $C^{(l)}$ zu C. In jedem Punkt des Segmentes $P_i\ P_{i+1}$ tragen wir längs der inneren Normalen die Länge l ab und verlängern das Segment nötigenfalls mittelst der Oskulationskreise in den Endpunkten. Bei hinreichend kleinem l sind die so erhaltenen Kurvenzüge stetig gekrümmt und können sich selbst nicht schneiden. Zusammen schliessen sie ein Gebiet ein, dessen Begrenzung wir $C^{(l)}$ nennen wollen. Derjenige Teil von $C^{(l)}$, welcher durch die in den Punkten $s_{i-\delta}$ und $s_{i+\delta}$ errichteten Normalen ausgeschnitten wird, heisse $C^{(l)}_{i,\delta}$ (Hierbei muss l kleiner als eine gewisse positive, von δ abhängige Zahl $l_0(\delta)$ angenommen werden).

Wir werden nun zeigen: Zu jeder beliebig kleinen positiven Grösse ε gibt es eine Zahl δ_0, dass

$$(2) \qquad \int_{C^{(l)}_{i,\delta}} \left| \frac{dV}{dn} \right| d\tau < \varepsilon$$

für $l < l_0(\delta)$, $\delta < \delta_0$.

Es ist

$$\int_{C^{(l)}_{i,\delta}} \left| \frac{dV}{dn} \right| d\tau \leq \int_{C^{(l)}_{i,\delta}} \int_C \left| \frac{\partial \log \frac{1}{r_{t\tau}}}{\partial n_\tau} \right| \cdot |f(t)|\,dt\,d\tau$$

Wir vertauschen die Integrationsfolge und schreiben

$$Q_i(t,l,\delta) = \int_{C_{i,\delta}^{(l)}} \left| \frac{\partial \log \frac{1}{r_{t\tau}}}{\partial n_\tau} \right| d\tau .$$

Es ist $Q_i(t,l,\delta) < A$, einer von t, l und δ unabhängigen Konstanten.[1] Unter Berücksichtigung der absoluten Integrierbarkeit von $f(s)$ erkennt man, dass sich eine von l und δ unabhängige Zahl d finden lässt, so dass

$$(3) \qquad \int_{s_i-d}^{s_i+d} |f(t)|\, Q_i(t,l,\delta)\, dt < A \int_{s_i-d}^{s_i+d} |f(t)|\, dt < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Da die Länge von $C_{i,\delta}^{(l)}$ mit l und δ nach Null konvergiert und sich dabei $r_{t\tau}$ für $|t - s_i| > d$ oberhalb einer gewissen positiven Zahl hält, so gilt im Gebiete $|t - s_i| > d$ gleichförmig

$$\lim_{\substack{l=0 \\ \delta=0}} Q_i(t,l,\delta) = 0 .$$

Es lässt sich also eine Grösse δ_0 so bestimmen, dass

$$(4) \qquad \int_{|t-s_i|>d} |f(t)|\, Q_i(t,l,\delta)\, dt < \frac{\varepsilon}{2}$$

für $l < l_0(\delta), \delta < \delta_0$.

Durch Addition von (3) und (4) ergibt sich Ungl. (2).

Es ist ebenfalls

$$(5) \qquad \lim_{\substack{l=0 \\ \delta=0}} \int_{C_{i,\delta}^{(l)}} |V|\, d\tau = 0,$$

---

[1] Dieses ergibt sich unmittelbar, wenn man annimmt, dass die Kurven $C^{(l)}$ von irgend einer Geraden in höchstens N Punkten geschnitten werden. Noch allgemeiner lässt sich die erwähnte Ungleichung aus der Tatsache herlei en, dass $\int_C \left| \frac{\partial \log \frac{1}{r_{pt}}}{\partial n_t} \right| dt$ eine obere Grenze besitzt, welche nur von der oberen Grenze des Krümmungsmasses und von der Länge von C abhängt.

wie sich folgendermassen bestätigen lässt. Wir bezeichnen mit x, y die Koordinaten eines Punktes auf $C_{i,\delta}^{(l)}$; mit ξ, η diejenigen eines Punktes auf C, und zwar in Bezug auf ein Koordinatensystem, dessen Achsen die Winkelhalbierenden zu den beiden Tangenten in P_i sind. Man kann eine Zahl R_0 bestimmen, dass

$$\int_{C_{i,\delta}^{(l)}} |V| d\tau < \int_{C_{i,\delta}^{(l)}} \int_{C} \log \frac{R_0}{r_{t\tau}} |f(t)| dt d\tau .$$

Es ist

$$\int_{C_{i,\delta}^{(l)}} \log \frac{R_0}{r_{t\tau}} d\tau < \int_{C_{i,\delta}^{(l)}} \log \frac{R_0}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}} (|dx| + |dy|) <$$

$$< \int_{C_{i,\delta}^{(l)}} \log \frac{R_0}{|x-\xi|} \cdot |dx| + \int_{C_{i,\delta}^{(l)}} \log \frac{R_0}{|y-\eta|} \cdot |dy| < 6 \int_0^{\frac{L}{2}} \log \frac{R_0}{x} dx,$$

wo L die Länge von $C_{i,\delta}^{(l)}$ bedeutet. Nun ist aber $\lim_{l=0,\,\delta=0} L = 0$, und somit folgt aus

$$\int_{C_{i,\delta}^{(l)}} |V| d\tau < 6 \int_0^{\frac{L}{2}} \log \frac{R_0}{x} dx \cdot \int_C |f(t)| dt$$

die Richtigkeit von (5).

Wenn p ein Punkt im Innern von $C^{(l)}$ ist, haben wir

$$V(p) = \frac{1}{2\pi} \int_{C^{(l)}} \left[V \frac{d \log \frac{1}{r_{p\tau}}}{dn} - \frac{dV}{dn} \log \frac{1}{r_{pt}} \right] d\tau .$$

Gemäss (2) und (5) kann man δ_0 so bestimmen, dass

$$\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{1}{2\pi}\int_{C_{i,\delta}^{(l)}}\left[V\frac{d\log\frac{1}{r_{p\tau}}}{dn}-\frac{dV}{dn}\log\frac{1}{r_{p\tau}}\right]d\tau\right|<\varepsilon$$

für $\delta<\delta_0$, $l<l_0(\delta)$.

Somit

$$\left|V(p)-\frac{1}{2\pi}\sum_{i=1}^{n}\int_{s_i+\delta}^{s_{i+1}-\delta}\left[V\frac{d\log\frac{1}{r_{p\tau}}}{dn}-\frac{dV}{dn}\log\frac{1}{r_{p\tau}}\right]\frac{d\tau}{d}\cdot dt\right|<\varepsilon.$$

$$(s_{n+1}=s_n.)$$

Falls man hierin l nach Null konvergieren lässt, wird

$$\left|V(p)-\frac{1}{2\pi}\sum_{i=1}^{n}\int_{s_i+\delta}^{s_{i+1}-\delta}\left[V\frac{d\log\frac{1}{r_{pt}}}{dn}-\frac{dV}{dn}\log\frac{1}{r_{pt}}\right]dt\right|<\varepsilon$$

für $\delta<\delta_0$.

Hieraus folgt Satz II, wenn man noch beachtet, dass der Integrand der rechten Seite von (1) absolut integrierbar. Letzteres folgt nämlich aus der absoluten Integrierbarkeit von

$$\int_C|V|dt \text{ und } \int_C\left|\frac{dV}{dn}\right|dt<\pi\int|f(t)|dt+$$

$$+\int_C\int_C\left|\frac{\partial\log\frac{1}{r_{st}}}{\partial n_s}\right|\cdot|f(t)|dt\,ds<(\pi+A)\int|f(t)|dt.$$

(A ist eine Konstante.)

Die zu (1) analoge Formel gilt auch für den Aussenraum.

III. Werden den Funktionen $f(s)$ und $g(s)$ dieselben Bedingungen auferlegt wie der Funktion $f(s)$ in Satz I, so gilt für

$$V = \int_C f(t) \log \frac{1}{r_{pt}} dt; \quad U = \int_C g(t) \log \frac{1}{r_{pt}} dt$$

die Formel

$$(6) \qquad \iint_T \left(\frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial V}{\partial y} \right) dx\, dy + \int_C U \frac{dV}{dn} ds = 0.$$

Die Doppelintegrale

$$\iint_T \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 \right] dx\, dy \text{ und } \iint_T \left[\left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right)^2 \right] dx\, dy$$

konvergieren.

Aus Satz I folgt, dass $|U| < B$ in T und hieraus wie oben, dass $\int_C U \frac{dV}{dn} ds$ absolut konvergiert. Sei $T^{(l)}$ das von $C^{(l)}$ begrenzte Gebiet und

$$C^{(l)} - \sum C_{i,\delta}^{(l)} = C_\delta^{(l)}.$$

Es ist

$$\iint_{T^{(l)}} \left(\frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial V}{\partial y} \right) dx\, dy + \int_{C^{(l)}} U \frac{dV}{dn} ds = 0$$

oder

$$\iint_{T^{(l)}} \left(\frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial V}{\partial y} \right) dx\, dy + \int_C U \frac{dV}{dn} ds - \int_{C_\delta^{(0)}} U \frac{dV}{dn} ds -$$

$$- \int_{C_\delta^{(l)}} U \frac{dV}{dn} ds + \sum \int_{C_{i,\delta}^{(0)}} U \frac{dV}{dn} ds - \sum \int_{C_{i,\delta}^{(l)}} U \frac{dV}{dn} ds.$$

Wir können zunächst ein δ wählen, dass

$$\left|\sum \int_{C_{i,\delta}^{(0)}} U \frac{dV}{dn} ds\right| + \left|\sum \int_{C_{i,\delta}^{(l)}} U \frac{dV}{dn} ds\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

für $l < l_0(\delta)$ und hierauf ein $l' < l_0(\delta)$ dass

$$\left|\int_{C_{\delta}^{(0)}} U \frac{dV}{dn} ds - \int_{C_{\delta}^{(l)}} U \frac{dV}{dn} ds\right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (l < l').$$

Somit

$$(7) \quad \left|\iint_{T^{(l)}} \left(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y}\right) dx\,dy + \int_C U \frac{dV}{dn} ds\right| < \varepsilon \quad (l < l').$$

Mit $f(s) = g(s)$ erhalten wir dass

$$\iint \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2\right] dx\,dy \text{ und } \iint \left[\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2\right] dx\,dy$$

konvergieren und hieraus wieder dass

$$\iint \left(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y}\right) dx\,dy$$

absolut konvergiert. Aus (7) folgt dann unmittelbar die zu beweisende Gleichung (6). Falls $\int_C f(s)\,ds = \int_C g(s)\,ds = 0$, gilt eine analoge Formel auch für den Aussenraum.

IV. Sei $W(p)$ das Potential einer Doppelbelegung von der Dichte $\mu(s)$, wo $\mu(s)$ für $s \neq s_i$ stetig ist

$$W(p) = \int_C \frac{\cos(n_t\, r_{tp})}{r_{tp}} \mu(t)\,dt.$$

Wenn p einem Punkte auf C mit der Bogenlänge $s\,(\neq s_i)$ von Innen bzw. von Aussen zustrebt, nähert sich $W(p)$ bestimmten Grenzwerten $W_i(s)$ bzw. $W_e(s)$. Es gelten $(s \neq s_i)$

$$W_i(s) = \pi\mu(s) + \int_C \frac{\cos(r_{ts}\, n_t)}{r_{ts}}\mu(t)\,dt$$

(8)

$$W_e(s) = -\pi\mu(s) + \int_C \frac{\cos(r_{ts}\, n_t)}{r_{ts}}\mu(t)\,dt.$$

Wir nehmen an dass $\mu(s)$ im Punkte s_ν eine Unstetigkeit erster Art besitze, d. h. es wird die Existenz der Grenzwerte

$$\lim_{\varepsilon=0}\mu(s_\nu+\varepsilon) = a \quad \lim_{\varepsilon=0}\mu(s_\nu-\varepsilon) = b$$

vorausgesetzt. Man bestätigt leicht dass für die Funktion

$$\sigma(s) = \int_C \frac{\cos(r_{ts}\, n_t)}{r_{ts}}\mu(t)\,dt \tag{9}$$

folgendes gilt:

$$\lim_{\varepsilon=0}\sigma(s_\nu+\varepsilon) = (\pi-\alpha_\nu)b + \int_C \frac{\cos(r_{ts_\nu}\, n_t)}{r_{ts_\nu}}\mu(t)\,dt$$

$$\lim_{\varepsilon=0}\sigma(s_\nu-\varepsilon) = (\pi-\alpha_\nu)a + \int_C \frac{\cos(r_{ts_\nu}\, n_t)}{r_{ts_\nu}}\mu(t)\,dt.$$

Es folgt

$$\sigma(s_\nu+0) - \sigma(s_\nu-0) = (\alpha_\nu-\pi)(\mu(s_\nu+0) - \mu(s_\nu-0)). \tag{10}$$

Ist $\mu(s)$ in s_ν stetig, so sind es auch $W_i(s)$ und $W_e(s)$ (Goursat. Cours d'analyse III, p. 201). Falls wir $\sigma(s)$ durch (9) nur für $s \neq s_\nu$ definieren, können wir $\sigma(s_\nu)$ so vorschreiben, dass $\sigma(s)$ in s_ν stetig wird.

§ 2.

Die Randwertaufgabe $W_i(s) - W_e(s) - \lambda(W_i(s) + W_e(s)) = 2\pi f(s)$.

Das Neumann-Poincarésche Problem besteht nun darin, das Potential der Doppelbelegung

$$W(p) = \int_C \frac{\cos(r_{tp}\, n_t)}{r_{tp}}\, \mu(t)\, dt$$

so zu bestimmen, dass,

$$(11) \qquad W_i(s) - W_e(s) - \lambda\,(W_i(s) + W_e(s)) = 2\pi f(s),$$

wo $f(s)$ eine gegebene stetige Funktion der Bogenlänge auf C ist. C soll von der in § 1. beschriebenen Beschaffenheit sein. Die Formeln (8) zeigen, dass dieses Problem gleichbedeutend ist mit der Lösung der Integralgleichung

$$(12) \qquad \mu(s) - \lambda \int_0^l \frac{\cos(r_{ts}\, n_t)}{\pi\, r_{ts}}\, \mu(t)\, dt = f(s)^1.$$

Der Kern

$$K(s,t) = \frac{\cos(r_{ts}\, n_t)}{\pi\, r_{ts}}$$

ist im quadratischen Gebiet $0 < \frac{s}{t} < l$ definiert und stetig ausser für $t = s_i$. Wenn man s einen festen von den s_i verschiedenen Wert beilegt, so wird $K(s,t)$ eine Funktion von t, für welche $t = s_i$ Unstetigkeitspunkte erster Art sind. Wir wollen nun das Verhalten von $K(s,t)$ in der Umgebung von (s_i, s_i) näher untersuchen. Wenn $s - s_i$ und $t - s_i$ dasselbe Vorzeichen haben, ist $K(s,t)$ stetig und begrenzt. Wir nehmen nun an dass

$$s_i - s = \sigma, \quad t - s_i = \tau$$

positive Grössen sind. Die Koordinaten der von s bzw. t repräsentierten Punkte seien mit $x(\sigma), y(\sigma)$ bzw. $a(\tau), b(\tau)$ bezeichnet. Es ist

$$K(s,t) = \frac{1}{\pi} \frac{-(x(\sigma) - a(\tau))\, b'(\tau) + (y(\sigma) - b(\tau))\, a'(\tau)}{(x(\sigma) - a(\tau))^2 + (y(\sigma) - b(\tau))^2}.$$

Wenn man die hier auftretenden Funktionen so weit in Tay-

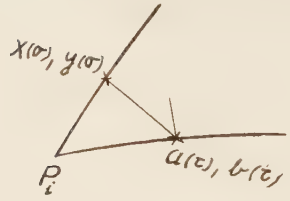
[1] Die Gültigkeit dieser Gleichung wird nur für $s \neq s_i$ gefordert.

LORSche Reihen entwickelt, dass die Restglieder die zweiten Ableitungen enthalten, ergibt sich

$$K(s,t) =$$

$$= \frac{1}{\pi} \frac{\sigma[(a'(o)\,y'(o) - x'(o)\,b'(o)] + \Omega_2(\sigma,\tau)}{(x'(o)\,\sigma - a'(o)\,\tau)^2 + (y'(o)\,\sigma - b'(o)\,\tau)^2 + \Omega_3(\sigma,\tau)} = \tag{13}$$

$$= \frac{1}{\pi} \frac{\sigma \sin\alpha_i + \Omega_2(\sigma,\tau)}{\sigma^2 + \tau^2 - 2\,\sigma\,\tau\cos\alpha_i + \Omega_3(\sigma,\tau)},$$



wo $\Omega_r(\sigma,\tau)$ eine homogene Form r:ten Grades von σ und τ ist, deren Koeffizienten in der Umgebung von $\sigma = \tau = 0$ begrenzte Funktionen dieser Variabeln sind. Die Gleichung (13) kann folgendermassen geschrieben werden:

$$\begin{cases} K(s,t) = \dfrac{1}{\pi} \dfrac{\sigma \sin\alpha_i}{\sigma^2 + \tau^2 - 2\,\sigma\,\tau\cos\alpha_i} + R(s,t) \\ R(s,t) = \dfrac{1}{\pi} \dfrac{\Omega_2(\sigma,\tau)\,\Delta - \sigma\,\Omega_2(\sigma,\tau)\sin\alpha_i}{\Delta^2\left[1 + \dfrac{\Omega_3(\sigma,\tau)}{\Delta}\right]} \\ \Delta = \sigma^2 + \tau^2 - 2\,\sigma\,\tau\cos\alpha_i. \end{cases} \tag{14}$$

Infolge der Annahme über α_i kann man eine positive Zahl k bestimmen, dass für $\sigma\,\tau > 0$ die Ungleichung

$$\Delta > k(\sigma^2 + \tau^2)$$

gilt. Aus (14) folgt also, dass $R(s,t)$ in der Umgebung von $\sigma = \tau = 0$ beschränkt bleibt. Eine analoge Rechnung für den Fall $s - s_i > 0 \quad t - s_i < 0$ ergibt als Resultat: Falls $(s - s_i)\,(t - s_i) < 0$, ist

$$K(s,t) =$$

$$= \frac{\sin\alpha_i}{\pi} \frac{|s - s_i|}{|s - s_i|^2 + |t - s_i|^2 - 2\,|s - s_i| \cdot |t - s_i| \cos\alpha_i} + R(s,t),$$

wo $R(s,t)$ in der Umgebung von $s = t = s_i$ beschränkt bleibt.

Für eine spätere Anwendung ist es wichtig, auch eine Abschätzung von $\frac{\partial K(s,t)}{\partial s}$ vorzunehmen. Hierbei nehmen wir an, dass die Koordinaten der Kurvensegmente von C stetige Ableitungen der drei ersten Ordnungen besitzen. Es wird

$$(15)\quad \frac{\partial K}{\partial s} = -\frac{1}{\pi N^2}\{(y'(\sigma)a'(\tau) - x'(\sigma)b'(\tau))N - 2[a'(\tau)(y(\sigma) - b(\tau)) - (x(\sigma) - a(\tau))b'(\tau)][(x(\sigma) - a(\tau))x'(\sigma) + (y(\sigma) - b(\tau))y'(\sigma)]\},$$

wo

$$N = (x(\sigma) - a(\tau))^2 + (y(\sigma) - b(\tau))^2$$

gesetzt ist. Bei Entwicklung in Taylorsche Reihen nehmen Zähler und Nenner in (15) die Gestalt

$$Z_2 + Z_3 + \Omega_1(\sigma, \tau)$$

bzw.

$$N^2 = N_4 + N_5 + \Omega_6(\sigma, \tau)$$

Z_i und N_i sind homogene quadratische Formen i:ten Grades, deren Koeffizienten nur die ersten und zweiten Ableitungen von $x(\sigma)$, $y(\sigma)$, $a(\tau)$, $b(\tau)$ für das Argument Null enthalten. (15) schreibt sich nun

$$(15)^1\quad \frac{\partial K}{\partial s} = \frac{Z_2 + Z_3}{N_4 + N_5} + \frac{\Omega_1(\sigma,\tau)(N_4 + N_5) - (Z_2 + Z_3)\Omega_6(\sigma,\tau)}{(N_4 + N_5)N^2}.$$

Wie oben folgt, dass das zweite Glied in der Nähe von $\sigma = \tau = 0$ beschränkt bleibt. Sei nun C_1 eine Kurve, welche mit C die Ecke P_i und die Oskulationskreise in diesem Punkte gemeinsam hat. Bezeichnen wir schliesslich die zu C_1 gehörige Funktion $K(s,t)$ mit $K_1(s,t)$ und wählen die Bogenlänge auf C_1 so, dass P_i auf C und C_1 durch dieselbe Bogenlänge repräsentiert wird, dann folgt wegen $(15)^1$, dass

$$\frac{\partial}{\partial s}[K(s,t) - K_1(s,t)]$$

in der Nähe von $(s_i s_i)$ begrenzt ist.

Wir definieren nun den Kern $g_i(s,t)$ auf folgende Weise:

1) $$g_i(s,t) = \frac{\sin\alpha_i}{\pi} \frac{|s-s_i|}{|s-s_i|^2 + |t-s_i|^2 - 2|s-s_i|\cdot|t-s_i|\cos\alpha_i}$$

im Gebiet $|s-s_i| \leq \delta, |t-s_i| \leq \delta \quad (s-s_i)(t-s_i) \leq 0$

2) $$g_i(s,t) = 0$$

in allen übrigen Punkten. δ wird kleiner als $\frac{s_{i+1}-s_i}{2}$ $(i = 1, 2 \cdots n)$ angenommen. Setzen

$$G(s,t) = \sum_{i=1}^{n} g_i(s,t)$$

(16)

$$K(s,t) = G(s,t) + H(s,t).$$

$H(s,t)$ hat folgende Stetigkeitseigenschaften, die wir mit (E) bezeichnen wollen. Sie ist eine überall beschränkte Funktion und stetig mit Ausnahme auf einer endlichen Anzahl zu den Koordinatenachsen parallelen Geradenstücken. Zu den beiden Seiten dieser Geradenstücke nimmt sie bestimmte, stetige Randwerte an (die im allgemeinen von einander verschieden sind) ausser in einer endlichen Anzahl Punkten, zu welchen im allgemeinen $(s_i s_i)$ gehören. Ferner ist $H(s,t)$ für $s = s_i$, $t \neq s_i$ stetig. Hieraus folgt, dass für jede absolut integrierbare Funktion $f(s)$

$$\int_0^l H(s,t) f(t)\, dt \text{ und } \int_0^l H(t,s) f(t)\, dt$$

stückweise[1] stetig werden.

Es sei $\varkappa$ eine positive Grösse kleiner als Eins. Wir wollen die Integrale:

[1] Verstehen damit, dass die betreffenden Funktionen stetig sind ausser an einer endlichen Anzahl Stellen, die Unstetigkeitspunkte erster Art sind.

$$I_1 = \int_0^l |g_i(s,t)| \cdot |t - s_i|^{-\varkappa} dt$$

$$I_2 = \int_0^l |g_i(t,s)| \cdot |t - s_i|^{\varkappa - 1} dt$$

abschätzen. Man findet

$$I_1 \leq \frac{\sin|\pi - \alpha_i|}{\pi} \int_0^{\delta} \frac{|s - s_i| \tau^{-\varkappa}}{|s - s_i|^2 + \tau^2 + 2\tau |s - s_i| \cos(\pi - \alpha_i)} d\tau =$$

$$= \frac{\sin|\pi - \alpha_i|}{\pi} |s - s_i|^{-\varkappa} \int_0^{\frac{\delta}{|s - s_i|}} \frac{x^{-\varkappa}}{1 + 2x\cos(\pi - \alpha_i) + x^2} dx <$$

(17)

$$< \frac{\sin|\pi - \alpha_i|}{\pi} |s - s_i|^{-\varkappa} \int_0^{\infty} \frac{x^{-\varkappa}}{1 + 2x\cos(\pi - \alpha_i) + x^2} dx =$$

$$= \frac{\sin \varkappa |\pi - \alpha_i|}{\sin \varkappa \pi} |s - s_i|^{-\varkappa}.$$ [1]

Für $\varkappa = 0$ ergibt sich

$$\int_0^l |g_i(s,t)| dt < \frac{|\pi - \alpha_i|}{\pi}. \tag{18}$$

Analog erhält man

$$I_2 < \frac{\sin \varkappa |\pi - \alpha_i|}{\sin \pi \varkappa} |s - s_i|^{\varkappa - 1}. \tag{19}$$

---

[1] $\int_0^{\infty} \frac{x^{-\varkappa}}{1 + 2x\cos\theta + x^2} dx$ berechnet man durch Anwendung des Satzes vom Residuum auf die längs der positiven reellen Achse aufgeschnittene x-Ebene.

Für $|s - s_i| > \delta$ sind I_1 und I_2 Null.

Wir nehmen an, dass $f(s)$ und $g(s)$ den Ungleichungen

$$|f(s)| < A_i |s - s_i|^{-\varkappa_i}$$

$$|g(s)| < B_i |s - s_i|^{\varkappa_i - 1}$$

für $|s - s_i| \leq \delta \quad 0 \leq \varkappa_i < 1$ genügen.

Man kann alsdann wegen (17) und (19) die Integralgleichungen:

$$\varphi(s) - \lambda \int_0^l G(s,t)\varphi(t)\,dt = f(s) \tag{20}$$

$$\psi(s) - \lambda \int_0^l G(t,s)\,\psi(t)\,dt = g(s) \tag{21}$$

durch Potenzreihen von λ lösen, welche für $|\lambda| < R'$ konvergieren. R' bedeutet die kleinste unter den Grössen:

$$\frac{\sin \pi\varkappa_1}{\sin |\pi - \alpha_1| \varkappa_1}, \quad \frac{\sin \pi\varkappa_2}{\sin |\pi - \alpha_2| \varkappa_2}, \ldots \frac{\sin \pi\varkappa_n}{\sin |\pi - \alpha_n| \varkappa_n}.$$

Man hat

$$|\varphi(s)| < \frac{A_i |s - s_i|^{-\varkappa_i}}{1 - \frac{|\lambda|}{R'}} \quad (|s - s_i| < \delta) \tag{22}$$

$$|\psi(s)| < \frac{B_i |s - s_i|^{\varkappa_i - 1}}{1 - \frac{|\lambda|}{R'}} \quad (|s - s_i| < \delta) \tag{23}$$

Sei R die kleinste von den Grössen $\frac{\pi}{|\pi - \alpha_i|}$. Es ist $\lim R' = R$, falls $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots \varkappa_n$ nach Null konvergieren. Wir erkennen: Wenn $|f(s)|$ begrenzt ist, wird die Lösung von (20) eine für $|\lambda| < R$ holomorphe Funktion, die für jedes λ in Bezug auf s begrenzt ist. Falls $g(s)$ einer Bedingung

$$|g(s)| < B|s - s_i|^{-\varkappa} \quad (|s - s_i| < \delta, \varkappa < 1)$$

genügt, kann man (21) für jeden λ-Wert $|\lambda| < R$ lösen, und es existieren solche Grössen B' und $\varkappa_1(\lambda)$, dass

$$|\psi(s)| < B'|s - s_i|^{-\varkappa_1(\lambda)} \quad (|s - s_i| < \delta, \varkappa < \varkappa_1(\lambda) < 1).$$

Man kann noch fragen, ob zum Kern $G(s,t)$ eine Resolvente gehört. Um dies zu beantworten untersuchen wir die Reihe

$$G(s,t) + \lambda G^{(2)}(s,t) + \lambda^2 G^{(3)}(s,t) + \ldots, \tag{24}$$

worin $G^{(\nu)}(s,t)$ die iterierten Kerne von $G(s,t)$ bezeichnen. Da $g_i(s,t)$ und $g_k(s,t)$ für $t \neq k$ zu einander orthogonal sind, ist die obige Reihe gleich der Summe der Reihen

$$g_i(s,t) + \lambda g_i^{(2)}(s,t) + \lambda^2 g_i^{(3)}(s,t) + \ldots. \tag{25}$$

Man erkennt ohne Schwierigkeiten Schritt für Schritt, dass die Funktionen $g_i^{(\nu)}(s,t)$ im Gebiet

$$|s - s_i| \leq \delta, |t - s_i| \leq \delta$$

stetig sind, ausser für $t = s_i$. Die Stetigkeit in $s = s_i$ folgt aus einer Bemerkung § 1. IV, welche hier anwendbar ist, da ja $g_i(s,t) = \frac{1}{\pi} \frac{\cos(n_t r_{ts})}{r_{ts}}$ in Bezug auf eine Kurve, die aus den beiden Tangenten in P_i besteht. $g_i^{(\nu)}(s,t)$ wird ausserhalb des oben erwähnten Gebietes Null. Sei $m_i(t)$ das Maximum von $g_i(s,t)$, wenn t festgehalten wird. Ungleichung (18) lehrt, dass (25) die Majorantenreihe

$$m_i(t) + \frac{\lambda}{R} m_i(t) \cdot \cdot + \left(\frac{\lambda}{R}\right)^{\nu} m_i(t) + \cdot \cdot = \frac{m_i(t)}{1 - \frac{\lambda}{R}}$$

besitzt. Da $m_i(t)$ für $|t - s_i| > \varepsilon$ begrenzt ist, folgt, dass (25) in diesem Gebiet und für $|\lambda| < R - \eta$ (η und ε beliebig kleine

positive Zahlen) gleichmässig konvergent ist und somit eine Funktion $g_i(s,t/\lambda)$ darstellt, die für

$$t \neq s_i, |s - s_i| < \delta, |t - s_i| < \delta$$

in s und t stetig, aber im Gebiete $|\lambda| < R$ holomorph ist. (24) konvergiert also auch und repräsentiert eine Funktion

$$G(s,t/\lambda) = \sum_{i=1}^{n} g_i(s,t/\lambda).$$

Es ist

$$\int_0^l |G(s,t/\lambda)|\,dt < \frac{1}{R - |\lambda|} \tag{26}$$

was sich aus (24) unter Benutzung folgenden Satzes ergibt: Eine für beliebig kleines positives ε im Gebiete $|s - s_i| > \varepsilon$ gleichmässig konvergente Reihe $\Sigma u_i(s)$, wo $u_i(s)$ für $s \neq s_i$ stetige Funktionen sind, kann gliedweise integriert werden, falls

$$\Sigma \int_0^l |u_i(s)|\,ds$$

konvergiert (Vergl. DE LA VALLEE POUSSIN, Cours d'analyse II 52, 108). Falls $f(s)$ eine begrenzte, in $s = s_i$ stetige Funktion ist, wird auch $\int_0^l G(s,t/\lambda) f(t)\,dt$ begrenzt und in s_i stetig. Es ist in der Tat die Reihe

$$\int_0^l G(s,t/\lambda) f(t)\,dt = \sum_0^\infty \lambda^\nu \int_0^l G^{(\nu)}(s,t) f(t)\,dt$$

deren Glieder in s_i stetig sind gleichmässig konvergent. Auf ganz analoge Weise könnte man zeigen, dass eine Unstetigkeit erster Art von $f(s)$ eine Unstetigkeit derselben Beschaffenheit für

$\int_0^l G(s,t/\lambda)f(t)dt$ zur Folge hat. Die Ungleichung (26) erlaubt uns auch den Schluss zu ziehen, dass $\int_0^l G(t,s/\lambda)g(t)dt$ zugleich mit $g(s)$ absolut integrierbar ist. Man bestätigt leicht durch eine erlaubte gliedweise Integration, dass die Resolventengleichungen

$$G(s,t/\lambda) - \lambda \int_0^l G(s,\tau)G(\tau,t/\lambda)d\tau = G(s,t)$$

(27)

$$G(s,t/\lambda) - \lambda \int_0^l G(s,\tau/\lambda)G(\tau,t)d\tau = G(s,t)$$

gelten. Diese Relationen ergeben auf bekannte Weise, dass (20) und (21) durch die Formeln

$$\varphi(s) = f(s) + \lambda \int_0^l G(s,t/\lambda)f(t)dt$$

(28)

$$\psi(s) = g(s) + \lambda \int_0^l G(t,s/\lambda)\,g(t)dt$$

für $|\lambda| < R$ eindeutig aufgelöst sind, falls wir über $f(s)$ und $g(s)$ voraussetzen und von $\varphi(s)$ und $\psi(s)$ verlangen, dass sie begrenzte bzw. absolut integrierbare Funktionen sein sollen.

Wir wollen nun $G(s,t/\lambda)$ auf eine andere Weise abschätzen. Sei $m_\varkappa(t)$ das Maximum von

$$|s-s_i|^\varkappa |g_i(s,t)|$$

bei festgehaltenem t. Setzen $|\lambda| = \varrho$.

Es wird

$$|g_i(s,t)| < m_\varkappa(t)\,|s-s_i|^{-\varkappa}$$

und daraus wegen (17) und (25)

$$|g_i(s,t/\lambda)| < \frac{m_\varkappa(t)\cdot|s-s_i|^{-\varkappa}}{1-\varrho\dfrac{\sin\varkappa|\pi-\alpha_i|}{\sin\varkappa\pi}}.$$

Die Rechnung ergibt

$$m_\varkappa(t) = \frac{\sin|\pi-\alpha_i|\cdot\beta^{\varkappa-1}}{\pi(1+\beta^2+2\beta\cos(\pi-\alpha_i))}|t-s_i|^{\varkappa-1},$$

wo

$$\beta = \frac{\sqrt{1-\varkappa^2\sin^2(\pi-\alpha_i)}+\varkappa\cos(\pi-\alpha_i)}{1-\varkappa}$$

gesetzt ist. Sei $\varkappa_i(\varrho)$ die kleinste positive Wurzel der Gl.

$$\sin\pi\varkappa-\varrho\sin|\pi-\alpha_i|\varkappa=0.$$

Wir können dann folgendes aussagen: Man kann zu jedem der Bedingung $|\varkappa|<\varkappa_i(\varrho)$ genügenden Wert von $\varkappa$ eine Zahl $M(\varkappa)$ finden, so, dass

$$|g_i(s,t/\lambda)| < M(\varkappa)|s-s_i|^{-\varkappa}|t-s_i|^{\varkappa-1}. \tag{29}$$

Wir gehen nun zur Behandlung der Gleichungen

$$\varphi(s)-\lambda\int_0^l K(s,t)\varphi(t)dt = f(s) \tag{30}$$

$$\psi(s)-\lambda\int_0^l K(t,s)\psi(t)dt = g(s) \tag{31}$$

über. Für $s\neq s_i$ werden $f(s)$ und $g(s)$ als stetig angenommen, im übrigen soll $f(s)$ begrenzt, $g(s)$ absolut integrierbar sein. Gl. (31) erhält man, wenn man das Potential der einfachen Belegung

$$V(p) = \int_C \psi(t)\log\frac{1}{r_{pt}}dt$$

der Randbedingung

$$\left(\frac{dV}{dn}\right)_i - \left(\frac{dV}{dn}\right)_e + \lambda\left[\left(\frac{dV}{dn}\right)_i + \left(\frac{dV}{dn}\right)_e\right] = -2\pi g(s)$$

unterwirft. Wir führen die Funktionen $\Omega(s, t/\lambda)$ und $F(s/\lambda)$ ein durch die Gl.

$$\Omega(s, t/\lambda) - \lambda \int_0^l G(s, \tau)\Omega(\tau, t/\lambda)d\tau = H(s, t)$$

(32)

$$F(s/\lambda) - \lambda \int_0^l G(s, \tau)F(\tau/\lambda)d\tau = f(s).$$

$\Omega(s, t/\lambda)$ besitzt die Stetigkeitseigenschaften (E) und ist ebenso wie $F(s/\lambda)$ für $|\lambda| < R$ holomorph. Wenn man in (30) $K(s, t)$ durch $G(s, t) + H(s, t)$ ersetzt und dann die Werte von $H(s, t)$ und $f(s)$ aus (32) substituiert, geht (30) durch Umstellung und durch eine wegen der absoluten Integrierbarkeit zulässige Vertauschung der Integrationsfolge über in

$$\Phi(s) - \lambda \int_0^l G(s, t)\Phi(t)dt = 0, \tag{33}$$

wo

$$\Phi(s) = \varphi(s) - \lambda \int_0^l \Omega(s, t/\lambda)\varphi(t)dt - F(s/\lambda)$$

gesetzt worden ist. Nach dem Vorherigen besitzt (33) keine von Null verschiedene begrenzte Lösung. Also: Alle beschränkten Lösungen von (30) genügen der Gl.

$$\varphi(s) - \lambda \int_0^l \Omega(s, t/\lambda)\varphi(t)dt - F(s/\lambda) = 0 \tag{34}$$

und umgekehrt. Auf diese Gleichung ist die Fredholmsche Methode anwendbar. Wir setzen

$$D_\Omega(\lambda) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^\nu}{\lfloor \nu} \int_0^l \int_0^l \cdots \int_0^l \begin{vmatrix} \Omega(s_1, s_1/\lambda) \cdots \Omega(s_1, s_\nu/\lambda) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \Omega(s_\nu, s_1/\lambda) \cdots \Omega(s_\nu, s_\nu/\lambda) \end{vmatrix} ds_1 \cdots ds_\nu$$

$$D_\Omega\left(\begin{matrix} s \\ t \end{matrix}/\lambda\right) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^\nu}{\lfloor \nu} \int_0^l \int_0^l \cdots \int_0^l \begin{vmatrix} \Omega(s, t/\lambda), \Omega(s, s_1/\lambda) \cdots \Omega(s, s_\nu/\lambda) \\ \Omega(s_1, t/\lambda), \Omega(s_1, s_1/\lambda) \cdots \Omega(s_1, s_\nu/\lambda) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \Omega(s_\nu, t/\lambda), \Omega(s_\nu, s_1/\lambda) \cdots \Omega(s_\nu, s_\nu/\lambda) \end{vmatrix} ds_1 \cdots ds$$

Diese Reihen sind für $|\lambda| < R$ holomorph. Die Nullstellen von $D_\Omega(\lambda)$ (welche sich nirgends im Gebiete $|\lambda| < R$ häufen) seien mit $\lambda_1, \lambda_2 \cdots \lambda_\nu \cdots$ bezeichnet. Wir können dann folgende Sätze ausprechen:

1) Falls $\lambda \neq \lambda_\nu$ besitzt (30) zu jeder Funktion $f(s)$ eine und nur eine beschränkte Lösung $\varphi(s)$, die durch

$$\varphi(s) = F(s/\lambda) + \lambda \int_0^l \frac{D_\Omega\left(\begin{matrix} s \\ t \end{matrix}/\lambda\right)}{D_\Omega(\lambda)} F(t/\lambda)\, dt$$

gegeben ist. Wenn $f(s)$ auch in den Punkten s_i stetig ist, wird $F(s/\lambda)$ dort stetig, und infolge (34) auch $\varphi(s)$. Aus (30) ergibt sich aber, dass $\varphi(s)$ für $s \neq s_i$ stetig ist. Dieselbe Gleichung lehrt unter Berücksichtigung von (11), dass falls $f(s)$ in s_i eine Unstetigkeit erster Art mit zugehöriger Schwankung S_i° besitzt, die Schwankung S_i von φ in s_i der Relation

$$S_i\left[1 - \lambda \frac{\alpha_i - \alpha}{\alpha}\right] = S_i^\circ$$

genügt.

2) $\lambda = \lambda_\nu$. In diesem Falle besitzen die zu (34) und (30) gehörigen homogenen Gleichungen eine endliche Anzahl von Null verschiedener Lösungen $\varphi_1(s), \varphi_2(s), \cdots \varphi_r(s)$. Dieselbe Schlussweise wie im vorigen Falle zeigt, dass diese Funktionen stetig sind. Seien $\theta_1(s), \theta_2(s) \cdots \theta_r(s)$ die r linear unabhängigen Lösungen der Gleichung

$$\theta(s) - \lambda_\nu \int_0^l \Omega(t, s/\lambda)\,\theta(t)\,dt = 0.$$

Man erhält: Gl. (30) ist für $\lambda = \lambda_\nu$ dann und nur dann lösbar, wenn

$$\int_0^l \theta_p(s)\,F(s/\lambda_\nu)\,ds = 0 \quad (p = 1, 2 \cdots r) \tag{35}$$

Falls wir (31) wie folgt schreiben

$$\psi(s) - \lambda \int_0^l [G(t,s) + H(t,s)]\,\psi(t)\,dt - g(s) = 0 \tag{36}$$

und für $H(t,s)$ den durch (32) gegebenen Wert einsetzen, geht (36) nach einigen Umformungen über in

$$\theta(s) - \lambda \int_0^l \Omega(t, s/\lambda)\,\theta(t)\,dt - g(s) = 0, \tag{37}$$

wo

$$\theta(s) = \psi(s) - \lambda \int_0^l G(t,s)\,\psi(t)\,dt \tag{38}$$

gesetzt worden ist. (31) ist mit dem System (37), (38) gleichbedeutend. Wir unterscheiden auch hier zwei Fälle.

1) $\lambda \neq \lambda_\nu$. Aus (37) erhält man für $\theta(s)$ eine absolut integrierbare Funktion. Nach dem Früheren liefert dann (38) $\psi(s)$ als Funktion von derselben Beschaffenheit. Die Lösung ist eindeutig.[1]

2) $\lambda = \lambda_\nu$. Wir betrachten die homogene Gleichung (31), die sich durch Nullsetzen von $g(s)$ ergibt. Aus (37) folgt

[1] Die hier ausgesprochenen Sätze stimmen mit denen von Zaremba (Journal de Math. 1904) gegebenen überein. Es wird dort $g(s)$ einer grösseren Einschränkung $\left(\text{nämlich } |g(s)| < \frac{\beta}{\Pi |s - s_i|^\varkappa} (\varkappa < 1)\right)$ unterworfen.

$$\theta(s) = C_1\theta_1(s) + C_2\theta_2(s) + C_r\theta_r(s).$$

Wir setzen

$$\psi_p(s) - \lambda_\nu \int_0^l G(t,s)\,\psi_p(t)\,dt = \theta_p(s) \quad (p = 1, 2 \cdots r)$$

Die allgemeine Lösung ist somit

$$\psi(s) = \sum_{p=1}^{r} C_p\,\psi_p(s)$$

$\psi_1, \psi_2 \cdots \psi_r$ sind linear unabhängig, weil sonst $\theta_1(s) \cdots \theta_r(s)$ gegen die Voraussetzung linear abhängig wären. Wir erkennen somit, dass die homogene Gl. (31) genau r linear unabhängige Lösungen besitzt, welche absolut integrierbar sind. Sei $|\lambda| = \varrho$ und $\varkappa_i(\varrho)$ die auf S. 18 eingeführte Grösse. Da die $\theta_p(s)$ beschränkt sind, gibt es eine Zahl B, dass

$$|\theta_p(s)| < B\,|s - s_i|^{\varkappa_i(\varrho)-1-\varepsilon} \quad (|s - s_i| < \delta).$$

Wegen (24) bleibt

$$|\psi_\nu(s)| \cdot |s - s_i|^{1-\varkappa_i(\varrho)+\varepsilon} \tag{39}$$

in der Umgebung von $s = s_i$ beschränkt, wie klein auch ε genommen wird.

Das System (37), (38) lehrt ganz unmittelbar, dass die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Lösbarkeit von

$$\psi(s) - \lambda_\nu \int_0^l K(t,s)\,\psi(t)\,dt = g(s)$$

die Relationen

$$\int_0^l g(s)\,\varphi_p(s)\,ds = 0 \quad (p = 1, 2 \cdots r)$$

sind.

Wenn wir die Formeln

$$F(s/\lambda) = f(s) + \lambda \int_0^l G(s,t/\lambda) f(t)\, dt$$

$$\psi_p(s) = \theta_p(s) + \lambda \int_0^l G(t,s/\lambda)\, \theta_p(t)\, dt$$

berücksichtigen, können wir die Bedingungen (35) in

$$\int_0^l \psi_p(s) f(s)\, ds = 0 \quad (p = 1, 2 \cdots r)$$

überführen.

Die Lösung von (30) können wir schreiben

$$\varphi(s) = F(s/\lambda) + \lambda \int_0^l \Gamma(s,t/\lambda)\, F(t/\lambda)\, dt$$

$$\Gamma(s,t/\lambda) = \frac{D_\Omega\left(\begin{matrix} s \\ t \end{matrix} / \lambda\right)}{D_\Omega(\lambda)}$$

oder, da

$$F(s/\lambda) = f(s) + \lambda \int_0^l G(s,t/\lambda) f(t)\, dt,$$

$$\varphi(s) = f(s) + \lambda \int_0^l \Big[G(s,t/\lambda) + \Gamma(s,t/\lambda) + \tag{40}$$

$$+ \lambda \int_0^l \Gamma(s,\tau/\lambda) G(\tau,t/\lambda)\, d\tau \Big] f(t)\, dt.$$

Aus (37), (38) erhält man

$$\theta(s) = g(s) + \lambda \int_0^l \Gamma(t,s/\lambda)\, g(t)\, dt$$

$$\psi(s) = \theta(s) + \lambda \int_0^l G(t,s/\lambda)\, \theta(t)\, dt,$$

also entsprechend

$$\psi(s) = g(s) + \lambda \int_0^l \Big[\Gamma(t, s/\lambda) + G(t, s/\lambda) + \\ + \lambda \int_0^l \Gamma(t, \tau/\lambda)\, G(\tau, s/\lambda)\, d\tau \Big] f(t)\, dt. \tag{41}$$

Wir setzen

$$K(s, t/\lambda) = G(s, t/\lambda) + \Gamma(s, t/\lambda) + \\ + \lambda \int_0^l \Gamma(s, \tau/\lambda)\, G(\tau, t/\lambda)\, d\tau. \tag{42}$$

Für jedes von λ_ν verschiedene λ besitzt $|\Gamma(s, t/\lambda)|$ eine endliche obere Grenze $A(\lambda)$. Man erhält alsdann aus (42)

$$\int_0^l |K(s, t/\lambda)|\, dt < \frac{1}{R - |\lambda|} + l\, A(\lambda) + \frac{|\lambda|\, A(\lambda)\, l}{R - |\lambda|} = \\ = \frac{1 + R\, l\, A(\lambda)}{R - |\lambda|}. \tag{43}$$

Aus (40) und (41) folgt

$$\varphi(s) = f(s) + \lambda \int_0^l K(s, t/\lambda)\, f(t)\, dt$$

$$\psi(s) = g(s) + \lambda \int_0^l K(t, s/\lambda)\, g(t)\, dt.$$

Falls wir diese Werte in (30) und (31) einsetzen, ergeben sich die Formeln

$$K(s, t/\lambda) - \lambda \int_0^l K(s, \tau)\, K(\tau, t/\lambda)\, d\tau = K(s, t)$$

$$K(s,t/\lambda) - \lambda \int_0^1 K(s,\tau/\lambda)\, K(\tau,t)\, d\tau = K(s,t).$$

Mit Hilfe dieser Gleichungen kann man beweisen, dass $K(s,t|\lambda)$ für $t \neq s_i$ stetig ist. $K(s,t|\lambda)$ wird die Resolvente des Kernes $K(s,t)$ genannt.

$$K(s,t) + \lambda K^{(2)}(s,t) + \lambda^2 K^{(3)}(s,t) + \cdots$$

konvergiert für $|\lambda| < |\lambda_1|$ und repräsentiert $K(s,t/\lambda)$. Es ist von Wichtigkeit, für $K(s,t/\lambda)$ in der Nähe von $(s_i s_i)$ eine Majorante zu erhalten. Wenn wir $\varkappa$ wie in (29) wählen, ergibt sich aus (42)

$$|K(s,t/\lambda)| < M(\varkappa)\,|s-s_i|^{\varkappa} \cdot |t-s_i|^{\varkappa-1} +$$

$$+ A(\lambda)\,[1 + |\lambda| \cdot \int_{s_i-\delta}^{s_i+\delta} M(\varkappa)\,|\tau - s_i|^{-\varkappa}\,|t-s_i|^{\varkappa-1}\, d\tau]$$

oder

$$(44)\quad |K(s,t/\lambda)| < M(\varkappa)\,|s-s_i|^{-\varkappa}\,|t-s_i|^{\varkappa-1} + M_1(\varkappa)\,|t-s_i|^{\varkappa-1}$$

$$\text{für } |s-s_i| < \delta, |t-s_i| < \delta$$

Wenn $\varkappa > 0$ können wir (44) durch

$$(45)\qquad |K(s,t/\lambda)| < M_2(\varkappa)\,|s-s_i|^{-\varkappa}\,|t-s_i|^{\varkappa-1}$$

ersetzen.

Formel (42) zeigt, dass in der Umgebung von $\lambda = \lambda_\nu$ eine Entwicklung

$$K(s,t/\lambda) = \frac{A_m(s,t)}{(\lambda-\lambda_\nu)^m} + \frac{A_{m-1}(s,t)}{(\lambda-\lambda_\nu)^{m-1}} + \cdots \frac{A_1(s,t)}{\lambda-\lambda_\nu} + B(s,t/\lambda)$$

gilt, worin $B(s,t/\lambda)$ für $\lambda = \lambda_\nu$ regulär ist. Wir können einen kleinen Kreis γ konstruieren, in welchem, abgesehen vom Pole λ_ν, sich $K(s,t/\lambda)$ regulär verhält. Es ist

$$(46) \qquad A_p(s,t) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma (\lambda - \lambda_\nu)^{p-1} K(s,t/\lambda)\, d\lambda.$$

Laut (45) kann man $\varkappa$ positiv und so klein wählen, dass eine Grösse M_3 existiert, mit welcher auf γ

$$|K(s,t/\lambda)| < M_3 |s - s_i|^{-\varkappa} \cdot |t - s_i|^{\varkappa - 1}$$

wird. Aus (46) folgt dann

$$(47) \qquad |A_p(s,t)| < M_4 |s - s_i|^{-\varkappa} |t - s_i|^{\varkappa - 1}$$

Es können nicht sämtliche $A_p(s,t)$ identisch verschwinden, weil sonst $\varphi(s)$ bei beliebigem $f(s)$ einem wohlbestimmten Grenzwert zustreben würde, wenn λ gegen λ_ν konvergiert. Dann würde aber (30) für $\lambda = \lambda_\nu$ stets lösbar sein, was einem früheren Resultate widerspricht.

Unter der Voraussetzung, dass C überall stetig gekrümmt ist, hat Plemelj[1] über die Eigenwerte λ_ν folgende Sätze bewiesen:

1. Die λ_ν sind sämtlich reell und dem absoluten Werte nach nicht kleiner als Eins.
2. Die Stellen λ_ν sind einfache Pole von $K(s,t/\lambda)$.
3. $\lambda = -1$ ist kein Eigenwert.

Sein Beweis lässt sich auch im vorliegenden Falle anwenden. Die Formel

$$\iint \left(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y} \right) dx\, dy + \int U \frac{dV}{dn}\, ds = 0$$

wo U und V die reellen oder die imaginären Teile von

$$\int_C \log \frac{1}{r_{pt}} \psi_n(t)\, dt, \quad \int_C \log \frac{1}{r_{pt}} A_n(s,t)\, dt$$

bedeuten, ist nämlich wegen Satz III in § 1. und infolge der Ungleichungen (39) und (47) auch hier gültig.

---

[1] Preisschrift d. Jabl. Ges. 1911. § 24.

§ 3.

Die dritte Randwertaufgabe.

Es wird eine Lösung von $\Delta U = 0$ gesucht, die auf C der Bedingung

$$\frac{dU}{dn} - h(s)\,U + \pi f(s) = 0 \tag{48}$$

genügt. $h(s)$ sei positiv und stetig, $f(s)$ absolut integrierbar. Wir setzen

$$U = \int_C \mu(t) \log \frac{R_0}{r_{pt}}\, dt,$$

wo R_0 grösser als jeder Durchmesser von C ist. Durch Einsetzen von

$$\frac{dU}{dn} = -\pi\,\mu(s) + \pi \int_0^l K(t,s)\,\mu(t)\,dt$$

in (48) ergibt sich die Integralgleichung

$$\mu(s) - \int_0^l \left[K(t,s) - \frac{h(s)}{\pi} \log \frac{R_0}{r_{st}}\right] \mu(t)\,dt = f(s). \tag{49}$$

Folgende Grössen werden eingeführt:

$$K(s,t) - \frac{h(t)}{\pi} \log \frac{R_0}{r_{st}} = G(s,t) + H(s,t) - \frac{h(t)}{\pi} \log \frac{R_0}{r_{st}}$$

$$P(s,t) = H(s,t) - \frac{h(t)}{\pi} \log \frac{R_0}{r_{st}}$$

$$Q(s,t) = P(s,t) + \int_0^l G(s,\tau/1)\,P(\tau,t)\,d\tau.$$

Auf dieselbe Weise, wie wir im vorigen Paragraphen (31) in (37), (38) transformierten, können wir hier (49) durch das System

$$\theta(s) - \int_0^l Q(t,s)\,\theta(t)\,dt = f(s) \tag{50}$$

$$\mu(s) - \int_0^l G(t,s)\,\mu(t)\,dt = \theta(s) \tag{51}$$

ersetzen.

Unter $e_1, e_2 \cdots e_r \cdots$ verstehen wir gewisse positive Konstanten. Es ist

$$|P(s,t)| < e_1 \log \frac{e_2}{|s-t|}.$$

Die Grösse

$$R(s,t) = \int_0^l G(s,\tau/1)\,P(\tau,t)\,d\tau$$

ist begrenzt in jedem Gebiet, welches die Punkte $(s_i s_i)$ nicht enthält. In der Umgebung jener Punkte gilt wegen (27)

$$|R(s,t)| < e_3 \int_{s_i-\delta}^{s_i+\delta} |s-s_i|^{-\varkappa}\,|\tau-s_i|^{\varkappa-1} \log \frac{e_2}{|\tau-t|}\,d\tau < \tag{52}$$

$$< e_4 |s-s_i|^{-\varkappa}.$$

$\varkappa$ können wir beliebig nahe an Null annehmen. Eine andere obere Grenze für $|R(s,t)|$ in der Nähe von $(s_i s_i)$ ergibt sich auf folgende Weise. Wir setzen zur Abkürzung $|t-s_i| = y$. Es ist

$$|R(s,t)| < e_1 \int_{t-\frac{y}{2}}^{t+\frac{y}{2}} |G(s,\tau/1)| \log \frac{e_2}{|\tau-t|}\,d\tau +$$

$$+ e_1 \int_{|\tau-t|>\frac{y}{2}} |G(s,\tau/1) \log \frac{e_2}{|\tau-t|}\,d\tau <$$

$$< e_5 |s - s_i|^{\varkappa} \int_{t-\frac{y}{2}}^{t+\frac{y}{2}} |\tau - s_i|^{-\varkappa-1} \log \frac{e_2}{|\tau - t|} d\tau +$$

$$+ e_1 \log \frac{2 e_2}{y} \int_0^l |G(s, \tau / 1)| d\tau <$$

$$< 2 e_5 |s - s_i|^{\varkappa} \left(\frac{y}{2}\right)^{-\varkappa-1} \int_0^{\frac{y}{2}} \log \frac{e_2}{n} dn + e_6 \log \frac{2 e_2}{y}$$

Diese Ungleichung zeigt, dass man, wie klein auch $\varkappa'$ sei, e_7 derart bestimmen kann, dass

$$|R(s,t)| < e_7 |t - s_i|^{-\varkappa'}. \tag{53}$$

Wir finden, indem wir unter dem Integralzeichen $Q(s,\tau)$ und $Q(\tau,t)$ laut (53) bzw. (52) abschätzen, dass der iterierte Kern

$$Q^{(2)}(s,t) = \int_0^l Q(s,\tau) Q(\tau,t) d\tau$$

begrenzt ist. Hieraus folgt: Entweder hat (50) und damit auch (49) für jede absolut integrierbare Funktion $f(s)$ eine Lösung $\mu(s)$ von derselben Beschaffenheit, oder es existiert eine Lösung $\theta_1(s)$ der Gl.

$$\theta_1(s) - \int_0^l Q(t,s)\theta_1(t) dt = 0.$$

Im letzteren Falle würde zu $\theta_1(s)$ nach (51) eine Funktion $\mu_1(s)$ gehören, für welche, da $|\theta_1(s)| < e_3$, die Relation gilt:

$$|\mu_1(s)| = \left|\theta_1(s) + \int_0^l G(\tau, s/1)\theta_1(t)d\tau\right| <$$

$$< e_8 + e_9 \int_{s_i-\delta}^{s_i+\delta} |\tau - s_i|^{-\varkappa} |s - s_i|^{\varkappa-1} d\tau < e_{10} |s - s_i|^{\varkappa-1}$$

$$(|s - s_i| < \delta) \qquad (0 < \varkappa < 1).$$

Auf die Funktion $U_1(p) = \int_C \log \frac{R_0}{r_{pt}} \mu_1(t)dt$, die der Randbedingung

$$\frac{dU_1}{dn} - h(s)U_1 = 0 \tag{54}$$

genügt, können wir somit Satz III § 1. anwenden, was nach Multiplikation von (54) mit U_1 und darauf folgender Integration die Gl.

$$\iint_T \left[\left(\frac{\partial U_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U_1}{\partial y}\right)^2\right] dx\,dy + \int_C h(s)U_1^2 ds = 0$$

liefert. Also ist U_1 Null in T und auf C. Hieraus folgt, dass

$$\left(\frac{dU_1}{dn}\right)_i - \left(\frac{dU_1}{dn}\right)_e = k\varrho(s),$$

wo $\varrho(s)$ die Dichte der natürlichen Belegung $\left(\int_C \varrho(s)ds = 1\right)$ und k eine Konstante bedeuten. Es ist aber

$$\left(\frac{dU_1}{dn}\right)_i - \left(\frac{dU_1}{dn}\right)_e = -2\pi\mu_1(s).$$

Somit

$$\mu_1(s) = -\frac{k}{2\pi}\varrho(s).$$

Da auf C $U_1(p) = 0$, so folgt

$$(55) \qquad -\frac{k}{2\pi}\int_C \log\frac{R_0}{r_{st}}\cdot\varrho(t)dt = 0.$$

Es ist aber wegen

$$\log\frac{R_0}{r_{st}} > 0,\ \varrho(s) > 0 \quad (s \neq s_i)$$

$$\int_C \log\frac{R_0}{r_{st}}\varrho(t)dt \neq 0.$$

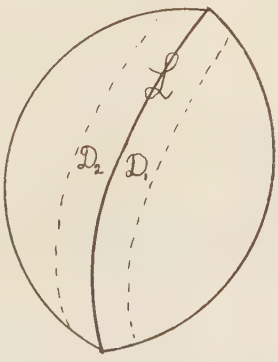
Somit gibt (55) $k = 0$ d. h.

$$\mu_1(s) = 0.$$

Es wird also unser Problem durch die Integralgl. (49) gelöst.

§ 4.

Über die dreidimensionalen Randwertaufgaben.



Um Bezeichnungsschwierigkeiten möglichst zu vermeiden, nehmen wir an, dass die begrenzende Fläche S nur eine einzige Kante L besitze, welche eine geschlossene, stetig gekrümmte Raumkurve bilde. Die beiden Tangentenebenen in einem Punkte auf L mögen mit einander die Winkel $\alpha(s)$ bilden (s bedeutet die Bogenlänge auf L). Wir nehmen an, dass $|\pi - \alpha(s)|$ eine obere Grenze θ kleiner als π besitze. P und M mögen Punkte auf S bezeichnen. Es ist nun die Gleichung

$$(56) \qquad U(P) - \lambda\int_S K(P,M)U(M)d\sigma_M = f(P)$$

zu lösen.

$$K(P, M) = \frac{1}{2\pi} \frac{\cos(r_{MP} n_M)}{r_{MP}^2}.$$

Beschreiben wir um jeden Punkt von L Kugeln vom Radius δ, so enveloppieren diese eine Röhren-Fläche, die zu beiden Seiten von L zwei bandförmige Bereiche D_1 und D_2 von S ausschneidet. Wir definieren $G(P, M)$ als eine Funktion, die nur dann von Null verschieden ist, wenn P und M verschiedenen Bändern D_1 und D_2 angehören, in welchem Falle sie gleich $K(P, M)$ ist. Wir spalten ferner den durch

$$K(P, M) = G(P, M) + H(P, M) \tag{57}$$

bestimmten Kern $H(P, M)$ in $G_1(P, M) + H_1(P, M)$, wo

$$G_1(P, M) = H(P, M) \text{ für } r_{PM} \leq \eta > 0$$

$$G_1(P, M) = 0 \qquad \text{» } r_{PM} > \eta$$

$H_1(P, M)$ hält sich auf S begrenzt.

Wir wollen zeigen, dass, wie klein ε auch sei, sich stets δ derart wählen lässt, dass

$$\int_S |G(P, M)| d\sigma_M < \frac{\theta}{\pi} + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{58}$$

Für den Beweis nehmen wir an, dass P auf D_1 liege. Die in Frage kommenden M gehören dann zu D_2. Die Normale von P auf L möge die Länge u haben und L in einem Punkte mit der zugehörigen Bogenlänge s treffen. Die entsprechenden auf M bezüglichen Grössen nennen wir v und t. D'_2 sei derjenige Teil von D_2, der durch $|t - s| \leq d$ bestimmt wird. D''_2 bezeichne das übrigbleibende Gebiet. Man sieht leicht, dass bei gegebenem d eine Zahl $\delta_0(d)$ gefunden werden kann, so dass, unabhängig von s_1

$$\int_{D''_2} |G(P, M)| d\sigma_M < \frac{\varepsilon}{4} \quad (\delta < \delta_0(d)). \tag{59}$$

Um das Integral über D'_2 abzuschätzen, nehmen wir die Tangenten-Ebene zu D_2 im Punkte s auf L als xy-Ebene eines rechtwinkligen Koordinaten-Systems, dessen x-Achse L im Koordinaten-Ursprung (s) berührt. Die Koordinaten von P sind

$$x = 0,\ y = u\cos\vartheta,\ z = u\sin\vartheta$$

M möge die Koordinaten ξ, η, ζ haben. Es ist $\zeta = f(\xi, \eta)$, wo $f, \frac{\partial f}{\partial \xi}, \frac{\partial f}{\partial \eta}$ für $\xi = \eta = 0$ verschwinden. Die Rechnung ergibt:

$$|G(P, M)| =$$

$$(60)\quad = \frac{1}{2\pi} \frac{\left|\xi\frac{\partial f}{\partial \xi} + \eta\frac{\partial f}{\partial \eta} - u\cos\vartheta\frac{\partial f}{\partial \eta} + u\sin\vartheta - \zeta\right|}{\left[\xi^2 + (u\cos\vartheta - \eta)^2 + (u\sin\vartheta - \zeta)^2\right]^{\frac{3}{2}} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial \eta}\right)^2}}$$

Wir führen hier an Stelle der Variablen ξ, η $t - s = \tau$ $v = \nu$ ein. Wenn wir unter $P_i(\tau, \nu)$ allgemein einen Ausdruck verstehen, der als homogene quadratische Form mit beschränkten Koeffizienten der Grössen τ, ν aufgefasst werden kann, können wir schreiben

$$\xi = \tau + P_1(\tau, \nu),\ \eta = \nu + P_2(\tau, \nu)$$

Es wird

$$\int_{D_2'} |G(P, M)|\, d\sigma_M = \int_{D_2'} |G(P, M)| \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial \eta}\right)^2}\, d\xi\, d\eta =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\delta} \int_{-d}^{+d} \frac{\left|\xi\frac{\partial f}{\partial \xi} + \eta\frac{\partial f}{\partial \eta} - u\cos\vartheta\frac{\partial f}{\partial \eta} + u\sin\vartheta - \zeta\right|}{\left[\xi^2 + (u\cos\vartheta - \eta)^2 + (u\sin\vartheta - \zeta)^2\right]^{\frac{3}{2}}} \left|\frac{D(\xi, \eta)}{D(\tau, \nu)}\right| d\tau\, d\nu =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\delta} \int_{-d}^{d} \frac{\beta_1 u\sin\vartheta + P_3(\tau, \nu)}{\left[\beta_2 \tau^2 + (u^2 - 2\nu u\cos\vartheta + \nu^2)\beta_3\right]^{\frac{3}{2}}} d\tau\, d\nu$$

$\beta_1 \beta_2 \beta_3 \cdots$ sind Grössen, die, falls wir δ und d hinreichend klein annehmen, gleichmässig beliebig nahe an Eins kommen. Hieraus folgt, dass wir schreiben können

$$\int_{D_4'} |G(P,M)|\,d\sigma_M < \frac{\beta_4}{2\pi}\int_0^{\delta'}\int_{-d}^{d} \frac{u\,.\,\sin\vartheta}{[\tau^2+u^2-2\nu u\cos\vartheta+\nu^2]^{\frac{3}{2}}}\,d\tau\,d\nu +$$

$$+ B\int_0^{\delta'}\int_{-d}^{d} \frac{\tau^2}{(\tau^2+u^2-2\nu u\cos\vartheta+\nu^2)^{\frac{3}{2}}}\,d\tau\,d\nu +$$

$$+ B\int_0^{\delta'}\int_{-d}^{d} \frac{\nu^2}{(\tau^2+u^2-2\nu u\cos\vartheta+\nu^2)^{\frac{3}{2}}}\,d\tau\,d\nu = I_1+I_2+I_3.$$

B ist eine von s unabhängige Konstante. Aus der Formel

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{ds}{(s^2+a)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{a}$$

folgt die Ungleichung

$$I_1 < \frac{\beta_4}{\pi}\int_0^{\delta'}\frac{u\sin\vartheta}{u^2-2\nu u\cos\vartheta+\nu^2}\,d\nu < \beta_4\frac{|\pi-\vartheta|}{\pi}.$$

Auf dieselbe Weise erhält man

$$I_3 < 2B\int_0^{\delta'}\frac{\nu^2}{u^2-2\nu u\cos\vartheta+\nu^2}\,d\nu < \frac{2B}{k}\int_0^{\delta'}\frac{\nu^2\,d\nu}{\nu^2+u^2} < \frac{2\,B\,\delta}{k}.$$

k ist eine solche positive Konstante, dass $u^2-2\nu u\cos\vartheta+\nu^2 > k(u^2+\nu^2)$ wird. Mittels dieser Ungleichung ergibt sich auch

$$I_2 < B\int_0^{\delta'}\int_{-d}^{d}\frac{\tau^2}{(\tau^2+k\nu^2)^{\frac{3}{2}}}\,d\tau\,d\nu <$$

$$< B\int_{-d}^{d}d\tau\int_0^{\infty}\frac{\tau^2\,d\nu}{(\tau^2+k\nu^2)^{\frac{3}{2}}} = 2Bd\int_0^{\infty}\frac{dx}{(1+kx^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Wir sehen somit, dass d und δ' so fixiert werden können, dass

$$\iint_{D'_2} |G(P,M)|\, d\sigma_M < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\theta}{\pi}$$

sobald $\delta < \delta'$. Man kann nun durch geeignetes Verfügen über δ noch die Relation (59) erfüllen, wonach dann Ungleichung (58) folgt. Ferner ist unmittelbar ersichtlich, dass wir η so wählen können, dass

$$\int_S |G_1(P,M)|\, d\sigma_M < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Also

$$\int_S |G(P,M) + G_1(P,M)|\, d\sigma_M < \frac{\theta}{\pi} + \varepsilon. \tag{61}$$

Wir werden nun das Integral

$$\int_S |G(M,P)|\, \omega(M)^{\varkappa}\, d\sigma_M \quad (\varkappa < 1)$$

abschätzen, wo $\omega(M)$ im Bande $D_1 + D_2$ gleich v^{-1}, im übrigen gleich δ^{-1} ist. Falls wir mit $[u]$ eine Grösse bezeichnen, die kleiner als cu (c = Konstante) ist, können die Richtungskosinus der Normalen in P so geschrieben werden:

$$[u],\ \sin\vartheta + [u],\ -\cos\vartheta + [u].$$

Also

$$|G(M,P)| =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \frac{|(\eta - u\cos\vartheta)\sin\vartheta - (\zeta - u\sin\vartheta)\cos\vartheta + P(u,\nu,\tau)|}{[\xi^2 + (u\cos\vartheta - \eta)^2 + (u\sin\vartheta - \zeta)^2]^{\frac{3}{2}}}$$

$P(u,\nu,\tau)$ bedeutet in der Nähe von (s) eine quadratische Form von u,ν,τ mit beschränkten Koeffizienten. Analog wie vorher finden wir in einer gewissen Umgebung von (s)

$$|G(M,P)| < \frac{\beta_3}{2\pi} \frac{\nu\sin\vartheta + B'(u^2+\tau^2)}{(\tau^2 + u^2 - 2\nu u\cos\vartheta + \nu^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Wir erhalten

$$\int_{D_2'} |G(M,P)|\,\omega(M)^{\varkappa}\,d\sigma_M <$$

$$< \frac{\beta_6}{2\pi}\int_0^{\delta}\int_{-d}^{+d} \frac{\nu \sin\vartheta\, \nu^{-\varkappa}\,d\tau\,d\nu}{[\tau^2+u^2-2\nu u\cos\vartheta+\nu^2]^{\frac{3}{2}}} +$$

$$+ \frac{B''}{2\pi}\int_0^{\delta}\int_{-d}^{d} \frac{u^2\,\nu^{-\varkappa}\,d\tau\,d\nu}{[\tau^2+u^2-2\nu u\cos\vartheta+\nu^2]^{\frac{3}{2}}} +$$

$$+ \frac{B''}{2\pi}\int_0^{\delta}\int_{-d}^{d} \frac{\tau^2\,\nu^{-\varkappa}\,d\tau\,d\nu}{[\tau^2+u^2-2\nu u\cos\vartheta+\nu^2]^{\frac{3}{2}}} = [I_1' + I_2' + I_3']\,u^{-\varkappa}.$$

Es ist

$$I_1' < \frac{\beta_6 u^{\varkappa}}{2\pi}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\nu^{1-\varkappa}\sin\vartheta\,d\tau\,d\nu}{[\tau^2+u^2+\nu^2-2\nu u\cos\vartheta]^{\frac{3}{2}}} =$$

$$= \beta_6 \frac{\sin|\pi-\vartheta|(1-\varkappa)}{\sin\pi(1-\varkappa)}$$

$$I_2' < \frac{B''}{\pi} u^{\varkappa}\int_0^{\delta} \frac{u^2\,\nu^{-\varkappa}\,d\nu}{u^2-2\nu u\cos\vartheta+\nu^2} < \frac{u}{\pi} B''\int_0^{\infty} \frac{x^{-\varkappa}}{1-2x\cos\vartheta+x^2}\,dx$$

$$I_3' < \frac{u^{\varkappa} B''}{2\pi}\int_{-d}^{d}\int_0^{\infty} \frac{\tau^2\,\nu^{-\varkappa}\,d\nu\,d\tau}{(\tau^2+k\nu^2)^{\frac{3}{2}}} < \frac{u^{\varkappa} B''}{2\pi}\int_{-d}^{d}|\tau|^{-\varkappa}d\tau\cdot\int_0^{\infty} \frac{x^{-\varkappa}}{(1+kx^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx.$$

Diese Ungleichungen zeigen, dass man d und δ_0' so bestimmen kann, dass

$$\int_{D_2'} |G(M,P)|\,\omega(M)^{\varkappa}\,d\sigma_M < \omega(P)^{\varkappa}\left[\frac{\sin(1-\varkappa)\theta}{\sin(1-\varkappa)\pi} + \frac{\varepsilon}{4}\right], (\delta < \delta_0')$$

Es ist klar, dass wir nun noch über δ derart verfügen können, dass

$$\int_{D_2''} |G(M,P)|\,\omega(M)^{\varkappa}\,d\sigma_M < \omega(P)^{\varkappa}\,\frac{\varepsilon}{2}.$$

Ebenso leicht ersichtlich ist, dass durch geeignete Wahl von η

$$\int_{S} |G_1(M,P)|\,\omega(M)^{\varkappa}\,d\sigma_M < \omega(P)^{\varkappa}\,\frac{\varepsilon}{2}.$$

Wir finden also

$$\int_{S} |G(M,P)+G_1(M,P)|\,\omega(M)^{\varkappa}\,d\sigma_M < \tag{62}$$

$$< \omega(P)^{\varkappa}\left[\frac{\sin(1-\varkappa)\,\theta}{\sin(1-\varkappa)\,\pi}+\varepsilon\right]$$

für hinreichend kleine δ und η.

Um (56) zu lösen, definieren wir $\Omega(P, M/\lambda)$ und $F(P/\lambda)$ durch

$$\Omega(P,M/\lambda) - \lambda\int_{S}[G(P,T)+G_1(P,T)]\,\Omega(T,M/\lambda)\,d\sigma_T = H_1(P,M)$$

$$F(P/\lambda) - \lambda\int_{S}[G(P,T)+G_1(P,T)]\,F(T/\lambda)\,d\sigma_T = f(P),$$

Gemäss (61) sind diese Gleichungen mittelst nach λ fortschreitender Potenzreihen in jedem Gebiet $|\lambda| < R' < \frac{\pi}{\theta}$ lösbar, falls wir δ und η geeignet wählen. $\Omega(P, M/\lambda)$ ist begrenzt. (56) wird mit

$$U(P) - \lambda\int_{S}\Omega(P,M/\lambda)\,U(M)\,d\sigma_M = F(P/\lambda) \tag{63}$$

gleichbedeutend. Wir erhalten auch, dass

$$V(P) - \lambda\int_{S}K(M,P)\,V(M)\,d\sigma_M = g(P) \tag{64}$$

durch das System

$$\theta(P) - \lambda \int_S \Omega(M, P/\lambda)\,\theta(M)\,d\sigma_M = g(P) \tag{65}$$

$$V(P) - \lambda \int_S [G(M,P) + G_1(M,P)]\,V(M)\,d\sigma_M = \theta(P) \tag{66}$$

ersetzt werden kann. Falls $g(P)$ in der Umgebung von L einer Bedingung

$$g(P) < C\,u^{-\varkappa'}\,(\varkappa' < 1)$$

genügt, können wir $\delta, \eta, \varkappa\,(\varkappa > \varkappa')$ derart wählen, dass (66) dank Ungleichung (62) durch eine Potenzreihe in λ lösbar wird. Es ist nun ersichtlich, dass wir über die Lösung von (56) und (64) im Gebiete $|\lambda| < \frac{\pi}{\theta}$ analoge Sätze wie im Falle des log. Potentials aussprechen können.

Die im Vorigen angewandte Methode ist auch auf das Problem der kleinen Schwingungen einer in einem Gefässe befindlichen, der Schwere unterworfenen Flüssigkeit anwendbar. Ebenso ermöglicht sie, die Randwertaufgaben der Elastizitätstheorie unter allgemeineren Voraussetzungen über die Begrenzung als bisher zu lösen.

§ 5.

Über ein Problem von Wärmegleichgewicht mit Strahlung.

Es sei D ein homogener Körper, der in seinem Innern einen konvexen Hohlraum D_1 enthalte. Die Begrenzungs-Fläche S von D_1 werde als vollkommen schwarz angenommen. Wir suchen die Temperaturverteilung U, die in D entsteht, wenn die Temperatur $f(P)$ auf der äusseren begrenzenden Fläche Σ vorgegeben ist, und wenn wir annehmen, dass zwischen den Wänden von D_1 Wärmeaustausch durch Strahlung stattfindet. Punkte auf S bzw. Σ werden mit $p, q\,..$ bzw. $P, Q\,..$ bezeichnet, während M einen beliebigen Punkt im Raume bedeuten möge. Wir setzen die Wärmemenge,

die von einem Flächenelement $d\sigma_q$ einem anderen $d\sigma_p$ in der Zeiteinheit zugestrahlt wird, gleich

$$h U \cos(n_q r_{qp})\, d\sigma_q\, d\Omega .$$

Hier bedeutet, U die Temperatur von $d\sigma_q$, n_q die Normale an $d\sigma_q$, $d\Omega$ den soliden Winkel, unter welchem $d\sigma_p$ von $d\sigma_q$ aus gesehen wird, h eine Konstante. Es folgt, dass das Flächenelement $d\sigma_p$ durch Strahlung in der Zeiteinheit die Wärmemenge

$$h d\sigma_p \int_S \frac{\cos(n_p r_{pq}) \cdot \cos(n_q r_{qp})}{r_{pq}^2} U(q)\, d\sigma_q$$

empfängt, während es in derselben Zeit

$$h U(p)\, d\sigma_p \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \sin\theta\, d\theta\, d\varphi = \pi h U(p)\, d\sigma_p .$$

abgibt. Die gesamte Ausstrahlung durch $d\sigma_p$ wird also

$$\pi h \left[U(p) - \int_S \frac{\cos(n_p r_{pq}) \cos(n_q r_{qp})}{\pi r_{pq}^2} U(q)\, d\sigma_q \right] d\sigma_p$$

Da dieser Ausdruck der von D durch Leitung kommenden Wärmemenge $\varkappa \dfrac{dU}{dn} d\sigma_p$ gleich sein muss, haben wir auf S:

$$(67) \qquad k \frac{dU}{dn} - U + \int_S \frac{\cos(n_p r_{pq}) \cos(n_q r_{qp})}{\pi r_{pq}^2} U(q)\, d\sigma_q = 0$$

k ist statt $\dfrac{\varkappa}{\pi h}$ gesetzt, wo $\varkappa$ die Wärmeleitungsfähigkeit von D ist. $\dfrac{dU}{dn}$ bedeutet die Ableitung von U nach der in D eindringenden Normalen. Unser Problem können wir nun folgendermassen formulieren: Es ist eine in D reguläre Lösung von $\Delta u = 0$ zu finden, die auf Σ die Werte $F(P)$ annimmt, während auf S die Bedingung (67) statthaben soll. Falls wir

$$(68) \qquad U(M)=\int_{\Sigma}\varphi(Q)\frac{\cos(n_Q r_{QM})}{r_{QM}^2}d\sigma_Q+\int_{S}\psi(q)\frac{1}{r_{qM}}d\sigma_q$$

setzen, so erhalten wir zur Bestimmung von φ und ψ ein System von zwei linearen Integralgleichungen, welches für alle $F(P)$ eindeutig lösbar ist, sofern kein von Null verschiedenes Lösungssystem (φ, ψ) der homogenen Gleichungen $(F(P)=0)$ existiert. Dass letztgenannter Fall jedoch niemals eintreffen kann, ergibt sich aus der folgenden Betrachtung. Die zu einem solchen Lösungssystem gehörige Funktion $U(M)$ muss auf Σ verschwinden. Falls wir (67) mit U multiplizieren und darauf integrieren, ergibt sich durch Anwendung einer Greenschen Formel

$$(69) \qquad \begin{aligned} k\int_{D}\int\int\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2\right]dx\,dy\,dz+\int_{S}U^2\,d\sigma- \\ -\int_{S}\int K(p,q)\,U(p)\,U(q)\,d\sigma_p\,d\sigma_q=0, \end{aligned}$$

wo $K(p,q)$ den symmetrischen Kern

$$\frac{\cos(n_p r_{pq})\cdot\cos(n_q r_{qp})}{\pi r_{pq}^2}$$

bedeutet. Es ist, wie sofort gezeigt werden soll, der kleinste von den absoluten Beträgen der Eigenwerte von $K(p,q)$ gleich Eins. Hieraus folgt

$$(70) \qquad \int_{S}U(p)^2\,d\sigma_p-\int_{S}\int K(p,q)\,U(p)\,U(q)\,d\sigma_p\,d\sigma_q\geq 0$$

also gemäss (69)

$$\int_{D}\int\int\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2\right]dx\,dy\,dz=0.$$

Somit ist U innerhalb D eine Konstante, welche ausserdem Null sein muss, da U auf Σ verschwindet. Wegen der Stetigkeit

von $U(M)$ beim Durchschreiten von S, ist U auch in D_1 gleich Null, woraus $\psi(p) = 0$ folgt. Die normalen Ableitungen von $U(M)$ sind beim Durchgange von Σ stetig, was zur Folge hat, dass U auch im Aussenraume verschwindet. Aus einer bekannten Eigenschaft des Potentials der Doppelbelegung folgt dann $\varphi(P) = 0$. Hiermit ist der Unmöglichkeitsbeweis erbracht.

Da S eine konvexe Fläche ist, so gilt $K(p, q) \geq 0$. Es ist falls wir $\cos(n_p r_{pq}) = \cos\theta$ setzen

$$(71) \qquad \int_S K(p, q)\, d\sigma_q = \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \cos\theta \sin\theta\, d\varphi\, d\theta = 1.$$

In bezug auf einen symmetrischen Kern $K(p, q) > 0$ wissen wir folgendes (Jentsch, Journ. f. Math. 1912): Zu dem kleinsten positiven Eigenwert λ_1 gehört eine nicht negative, einfache Eigenfunktion $\varphi_1(p)$. Der absolute Betrag von irgend einem anderen Eigenwert ist nicht kleiner als λ_1. Zu keinem anderen Eigenwert kann eine positive Eigenfunktion gehören, weil diese zu $\varphi_1(p)$ orthogonal sein müsste. Die Relation (71) zeigt, dass im vorliegenden Falle $\varphi_1(p)$ eine Konstante und λ_1 gleich Eins ist, und somit, dass kein Eigenwert zwischen -1 und $+1$ liegt, woraus also die Ungleichung (70) folgt.

§ 6.

Erweiterung eines Entwicklungssatzes von Hilbert.

Nehmen wir bei dem im vorigen Paragraphen behandelten Probleme die Flächen S und Σ als mit Kanten behaftet an, so lassen sich die zugehörigen Integralgleichungen mit der Methode in § 4 behandeln. Um die Richtigkeit von (70) zu erkennen müssen wir aber einige neue Betrachtungen anstellen. Der Einfachheit halber behandeln wir nur das analoge zweidimensionale Problem. Hier tritt die Integralgleichung

$$\mu(s) - \lambda \int_C \frac{\cos(r_{ts} n_t) \cos(r_{st} n_s)}{2 r_{st}} \mu(t) dt = f(s)$$

auf, wo C von der auf S. 1 beschriebenen Beschaffenheit ist. Das erwünschte Resultat ergibt sich aus den folgenden allgemeinen Sätzen.

Es sei $K(s,t)$ ein reeller symmetrischer Kern, der nur in einer endlichen Anzahl Punkten P und auf einer endlichen Anzahl monotoner stetiger Kurvenstücke L unstetig wird. Wir bezeichnen mit $G_\varepsilon(s,t)$ einen Kern, der in Punkten, deren Abstand von P und L kleiner als ε ausfällt, gleich $K(s,t)$ ist, während er sonst Null wird. Das Maximum von

$$\int_a^b |G_\varepsilon(s,t)|\,dt$$

sei M_ε und $\lim_{\varepsilon=0} M_\varepsilon = \frac{1}{R}$.

I. Die Gleichung

$$\mu(s) - \lambda \int_a^b K(s,t)\mu(t)dt = f(s) \tag{73}$$

ist im Gebiete $|\lambda| < R$, das wir T nennen wollen, für alle beschränkten $f(s)$ durch eine Funktion $\mu(s)$ derselben Beschaffenheit lösbar, falls λ nicht einer gewissen innerhalb T diskreten reellen Zahlenfolge $\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n \cdots$ angehört. Zu jedem λ_ν gehört eine endliche Anzahl beschränkter Eigenfunktionen, deren Gesamtheit wir durch ein normiertes System von Orthogonalfunktionen $\varphi_1, \varphi_2 \cdots \varphi_n \cdots$ ausdrücken können.

II. $\mu(s)$ ist eine in T meromorphe Funktion, die in λ_ν den prinzipalen Teil

$$\frac{\sum_{(\nu)} \varphi_i(s) \int_a^b \varphi_i(t) f(t)\,dt}{1 - \frac{\lambda}{\lambda_\nu}} \tag{74}$$

besitzt. Die Summe ist über die zu λ_ν gehörigen Eigenfunktionen zu erstrecken.

III. Seien $\int_a^b f(s)\varphi_i(s)ds = \alpha_i$ und $\varphi_1\varphi_2\cdots\varphi_N$ die Eigenfunktionen, welche zu Eigenwerten mit absoluten Beträgen kleiner als ϱ gehören. Es gilt

$$(75)\qquad \left|\int_a^b\int_a^b K(s,t)f(s)f(t)ds\,dt - \sum_1^N \frac{\alpha_i^2}{\lambda_i}\right| < \frac{\int_a^b f(s)^2 ds - \sum_1^N \alpha_i^2}{\varrho}.$$

Satz I ergibt sich, falls wir $K(s,t)$ in $G_\varepsilon(s,t) + (K(s,t) - G_\varepsilon(s,t))$ zerspalten und dann analog wie in § 2 verfahren.

Um II. zu beweisen, schreiben wir

$$K(s,t) = \frac{1}{\lambda_\nu}\sum_{(\nu)}\varphi_i(s)\varphi_i(t) + K_1(s,t)$$

$$(76)\qquad \mu_1(s) - \lambda\int_a^b K_1(s,t)\mu_1(t)dt = f(s).$$

Da

$$\frac{1}{\lambda_\nu}\sum_{(\nu)}\varphi_i(s)\varphi_i(t) \text{ und } K_1(s,t)$$

orthogonal sind, so folgt

$$\mu(s) = \mu_1(s) + \frac{\lambda}{\lambda_\nu - \lambda}\sum_{(\nu)}\varphi_i(s)\int_a^b \varphi_i(t)f(t)dt.$$

$\mu_1(s)$, welche in T analoge Eigenschaften wie $\mu(s)$ besitzt, muss im Punkte λ_ν regulär sein, weil andernfalls die zu (76) gehörige homogene Gleichung und damit auch

$$(77)\qquad \mu(s) - \lambda\int_a^b K(s,t)\mu(t)dt = 0$$

eine nicht identisch verschwindende, zu allen $\varphi_i(s)$ orthogonale Lösung $\mu(s)$ haben würde, was aber unmöglich ist, da jede der Gl. (77) genügende Funktion die Form $\Sigma c_i\varphi_i(s)$ haben muss.

Um die Abhängigkeit von λ hervorzuheben, schreiben wir $\mu(s) = \varphi(s, \lambda)$. Es ist in einer gewissen Umgebung von $\lambda = 0$.

$$\varphi(s, \lambda) = f(s) + \lambda f_1(s) + \lambda^2 f_2(s) + \cdots,$$

wo

$$f_n(s) = \int_a^b K(s, t) f_{n-1}(t)\, dt, \quad f_0(s) = f(s)$$

gesetzt ist. Wir substituieren für $f(s)$ die Funktion

$$h(s) = f(s) - \sum_1^N \alpha_i \varphi_i(s)$$

$\varphi(s, \lambda)$ geht dann in eine Funktion $\psi(s, \lambda)$ über, die wegen II für $|\lambda| < \varrho$ holomorph ist. Es gilt

$$\psi(s, \lambda) = h(s) + \lambda h_1(s) + \lambda^2 h_2(s) + \cdots \tag{78}$$

Falls wir (78) mit $h(s)$ multiplizieren und darauf integrieren, ergibt sich

$$\int_a^b \psi(s, \lambda) h(s)\, ds = \sum_0^\infty y_\nu \lambda^\nu,$$

wo $y_\nu = \int_a^b h(s) h_\nu(s)\, ds$ gesetzt ist. Man bestätigt leicht die Gl.

$$\int_a^b h_i(s) h_k(s)\, ds = \int_a^b h(s) h_{i+k}(s)\, ds$$

$\sum_0^\infty y_\nu \lambda^\nu$ konvergiert sicher für $|\lambda| < \varrho$ und somit auch

$$\sum_0^\infty y_{2\nu} \lambda^{2\nu}. \tag{79}$$

Ferner ist

$$y_{2\nu}^2 = \left[\int_a^b h_{\nu+1}(s)\, h_{\nu-1}(s)\, ds\right]^2 \leq y_{2\nu+2}\, y_{2\nu-2}.$$

Falls y_2 von Null verschieden ist, gilt

$$\frac{y_2}{y_0} < \frac{y_4}{y_2} \leq \cdots \leq \frac{1}{\varrho'^2}$$

wo ϱ' den Konvergenzradius von (79) bedeutet. Da $\varrho \leq \varrho'$, ergibt sich

$$y_2 \leq \frac{y_0}{\varrho^2}.$$

Hieraus erhält man

$$(80) \qquad |y_1| = \left|\int_a^b h(s)\, h_1(s)\, ds\right| \leq \sqrt{y_0\, y_2} \leq \frac{y_0}{\varrho},$$

welche Ungl. auch für $y_2 = 0$ gültig bleibt. Es ist

$$y_0 = \int_a^b f(s)^2\, ds = \sum_1^N \alpha_i^2$$

$$y_1 = \int_a^b \int_a^b K(s,t)\, f(s)\, f(t)\, ds\, dt - \sum_1^N \frac{\alpha_i^2}{\lambda_i}.$$

Aus (80) folgt nun die zu beweisende Ungleichung (75).

Für $N = 0$ ergibt sich

$$\left|\int_a^b \int_a^b K(s,t)\, f(s)\, f(t)\, ds\, dt\right| \leq \int_a^b f(s)^2\, ds \cdot |\lambda_1|.$$

Es ist also $K(s,t)$ ein, im Sinne von H. Weyl, beschränkter Kern. (Math. Ann. 66.)

In denjenigen Fällen, wo $\lim_{\varepsilon = 0} M_\varepsilon = 0$, erhält man die Hilbert'sche Formel:

$$\int_a^b \int_a^b K(s,t) f(s) f(t) \, ds \, dt = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\alpha_i^2}{\lambda_i}.$$

Dies tritt z. B. für den Kern

$$K(s,t) = H(s,t) \, \omega(|s-t|)$$

ein, wenn $H(s,t)$ begrenzt und $\omega(x)$ absolut integrierbar ist.

Teil II.

§ 7.

Lösung der Randwertaufgabe für ein Kreiszweieck.

Wir nehmen in diesem Paragraphen an, dass die Kurve C aus zwei Kreisbogensegmenten C_1 und C_2 bestehe. Um zu einer Lösung der Gleichung

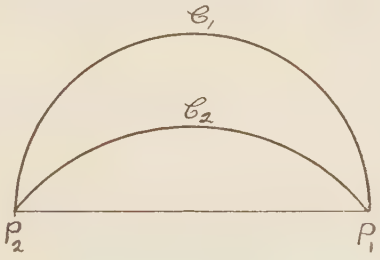
$$\mu(s) - \lambda \int_C \frac{\cos(r_{ts} n_t)}{\pi r_{ts}} \mu(t)\, dt = f(s) \tag{1}$$

zu gelangen, wird eine innerhalb und ausserhalb C harmonische Funktion $W(p)$ gesucht, die auf C den Bedingungen

$$W_i(s) - W_e(s) - \lambda[W_i(s) + W_e(s)] = 2\pi f(s)$$

$$\frac{dW_i}{dn} = \frac{dW_e}{dn} \tag{2}$$

genügt. Wir bedienen uns eines dipolaren Koordinatensystems, dessen Pole P_1 und P_2 sind (Vergl. W. Dürll. Probleme d. logarithm. Potentials, Leipzig 1898) Mit p einen beliebigen Punkt der Ebene verstehend, führen wir folgende Bezeichnungen ein:



$$\text{Abstand } \overline{p P_1} = \varrho_1 \quad .$$

$$\text{» } \quad \overline{p P_2} = \varrho_2$$

$$\text{» } \quad \overline{P_1 P_2} = 2a$$

$$\text{Winkel } \overline{P_1 p P_2} = \vartheta$$

$$u = \log \frac{\varrho_2}{\varrho_1}$$

u und ϑ sind die dipolaren Koordinaten des Punktes p, was im folgenden durch

$$p \sim (u, \vartheta)$$

ausgedrückt werden soll. C_1 und C_2 werden beschrieben, wenn man u und ϑ die Bedingungen

$$\vartheta = \vartheta_1, \quad -\infty < u < \infty$$

bzw.

$$\vartheta = \vartheta_2, \quad -\infty < u < \infty$$

auferlegt. Die Ungleichungen

$$-\infty < u < \infty, \ \vartheta_1 < \vartheta < \vartheta_2$$

bzw.

$$-\infty < u < \infty, \ \vartheta_2 < \vartheta < \vartheta_1 + 2\pi$$

definieren den Innenraum bzw. den Aussenraum von C. Der Abstand r zwischen zwei Punkten $(u\,\vartheta)$ und $(u_1\,\vartheta_1)$ ist durch

$$r^2 = 2a^2 \frac{ch(u-u_1) - \cos(\vartheta - \vartheta_1)}{(chu - \cos\vartheta)(chu_1 - \cos\vartheta_1)} \tag{3}$$

gegeben. Wir benutzen die Bezeichnungen

$$chu = \frac{e^u + e^{-u}}{2} \qquad shu = \frac{e^u - e^{-u}}{2}.$$

Man erhält das Quadrat des Linienelementes aus der Gl.

$$(4) \qquad ds^2 = \frac{a^2}{(ch\,u - \cos\vartheta)^2}(du^2 + d\vartheta^2).$$

$W(p)$ als Funktion von u und ϑ muss somit

$$\frac{\partial^2 W}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial \vartheta^2} = 0$$

befriedigen. Falls A, B, C, D und q Konstanten bedeuten, so sind

$$(A\,e^{q\vartheta} + B\,e^{-q\vartheta})\cos qu, (C\,e^{q\vartheta} + D\,e^{-q\vartheta})\sin qu$$

Partikularlösungen dieser Gleichung. Wir machen den Ansatz

$$(5) \qquad \begin{aligned} W_i(u,\vartheta) = &\int_0^\infty [A_i(q)\,e^{q\vartheta} + B_i(q)\,e^{-q\vartheta}]\cos qu\,dq + \\ &+ \int_0^\infty [C_i(q)\,e^{q\vartheta} + D_i(q)\,e^{-q\vartheta}]\sin qu\,dq \end{aligned}$$

$$W_e(u,\vartheta) = \int_0^\infty (A_e(q)\,e^{q\vartheta} + B_e(q)\,e^{-q\vartheta})\cos qu\,dq +$$

$$+ \int_0^\infty (C_e(q)\,e^{q\vartheta} + D_e(q)\,e^{-q\vartheta})\sin qu\,dq$$

und setzen

$$f(s) = f_1(u) \text{ für } s \sim (u, \vartheta_1)$$

$$f(s) = f_2(u) \quad » \quad s \sim (u, \vartheta_2).$$

Analoge Bezeichnungsweise wird im folgenden auch für andere Funktionen der Bogenlänge angewandt. Die FOURIERsche Integralformel gibt

$$f_j(u) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} [P_j(q) \cos qu + Q_j(q) \sin qu]\, dq \quad (j = 1, 2)$$

(6)

$$P_j(q) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_j(x) \cos qx\, dx \qquad Q_j(q) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_j(x) \sin qx\, dx.$$

Aus (5) erhält man

$$\frac{\partial W_i(u, \vartheta)}{\partial \vartheta} = \int_0^{\infty} (q A_i(q)\, e^{q\vartheta} - q B_i(q)\, e^{-q\vartheta}) \cos qu\, dq +$$

(7)

$$+ \int_0^{\infty} (q C_i(q)\, e^{q\vartheta} - q D_i(q)\, e^{-q\vartheta}) \sin qu\, dq$$

und Analoges für $\frac{\partial W_e(u, \vartheta)}{\partial \vartheta}$. Die Gl. (2) sind, falls wir $\frac{1+\lambda}{1-\lambda} = \beta$ setzen, mit

$$W_i(u, \vartheta_2) - \beta W_e(u, \vartheta_2) = \frac{2\pi}{1-\lambda} f_2(u)$$

(8)

$$W_i(u, \vartheta_1) - \beta W_e(u, \vartheta_1 + 2\pi) = \frac{2\pi}{1-\lambda} f_1(u)$$

$$\frac{\partial W_i(u, \vartheta_2)}{\partial \vartheta} = \frac{\partial W_e(u, \vartheta_2)}{\partial \vartheta}, \quad \frac{\partial W_i(u, \vartheta_1)}{\partial \vartheta} = \frac{\partial W_e(u, \vartheta_1 + 2\pi)}{\partial \vartheta}$$

gleichbedeutend. Wenn man (5), (6) und (7) in (8) einsetzt, erhält man vier Gl. von der Form

$$\int_0^{\infty} (A(q) \cos qu + B(q) \sin qu)\, dq = 0.$$

Hier setzen wir $A(q)$ und $B(q)$ gleich Null und erhalten so acht Gleichungen zur Bestimmung der in (5) auftretenden unbekannten Funktionen. Falls man zu den sich so aus (5) ergebenden Funktionen $W_i(p)$ und $W_e(p)$ geeignet gewählte

Konstanten C'_i und C'_e addiert, erhält man eine formale Lösung von (2), die im Unendlichen verschwindet. Es ist zu erwarten, dass

$$\frac{1}{2\pi}[W_i(s) + C'_i - W_e(s) - C'_e] = \mu(s)$$

eine Lösung unserer Integralgleichung ist. Bei Durchführung der Rechnungen ergaben sich für $\mu(s)$ folgende Formeln

$$\mu_1(u) = f_1(u) + \frac{\lambda}{\pi}[H_{F_1}(u, \theta/\lambda) - H_{F_2}(u, \theta/-\lambda)] + k$$

(9)

$$\mu_2(u) = f_2(u) + \frac{\lambda}{\pi}[H_{F_1}(u, \theta/\lambda) + H_{F_2}(u, \theta/-\lambda)] + k$$

$$k = \frac{\lambda}{\pi(1-\lambda)}[H_{F_1}(0, \pi - \vartheta_1/\lambda) + H_{F_2}(0, \pi - \vartheta_1/-\lambda) -$$

$$- H_{F_1}(0, \pi - \vartheta_2/\lambda) + H_{F_2}(0, \pi - \vartheta_2/-\lambda)]$$

$$F_1(u) = \frac{f_1(u) + f_2(u)}{2}, \quad F_2(u) = \frac{f_1(u) - f_2(u)}{2}, \quad \theta = \pi - (\vartheta_2 - \vartheta_1).$$

Mit $H_f(u, \gamma/\lambda)$ wird der Ausdruck

$$H_f(u, \gamma/\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{\infty} \frac{sh\,\gamma q}{sh\,\pi q - \lambda\, sh\,\theta q} \cos q(u - \varkappa) f(\varkappa)\, dq\, d\varkappa$$

verstanden. Wir werden zunächst $H_f(u, \gamma/\lambda)$ näher untersuchen. Nacher wird durch direkte Verifikation gezeigt, dass (9) eine Lösung von (1) darstellt.

Wenn q von Null bis ∞ geht, durchläuft $\lambda = \frac{sh\,\pi q}{sh\,\theta q}$ monoton variierend denjenigen Teil L der reellen Achse, welcher durch

$$\lambda\theta \geq \pi$$

definiert wird. Die nicht zu L gehörigen Punkte der λ-Ebene bilden ein Gebiet, das wir Γ nennen wollen.

$$E(\sigma, \gamma/\lambda) = \int_0^\infty \frac{sh\gamma q}{sh\pi q - \lambda sh\theta q} \cos q\sigma \, dq$$

ist in jedem innerhalb Γ gelegenen Gebiet gleichmässig konvergent falls $|\gamma| < \pi$. Um über die Abhängigkeit von σ Aufschluss zu gewinnen, verfahren wir folgendermassen. Sei $\bar{\lambda}$ die Konjugierte von λ. Es ist

$$E(\sigma, \gamma/\lambda) =$$

$$= \frac{1}{2} R\left[\int_0^\infty sh\gamma q \left(\frac{1}{sh\pi q - \lambda sh\theta q} + \frac{1}{sh\pi q - \bar{\lambda} sh\theta q}\right) e^{iq|\sigma|} dq\right] +$$

$$+ \frac{i}{2} I\left[\int_0^\infty sh\gamma q \left(\frac{1}{sh\pi q - \lambda sh\theta q} - \frac{1}{sh\pi q - \bar{\lambda} sh\theta q}\right) e^{iq|\sigma|} dq\right].$$

$R[A]$ und $I[A]$ sind der reelle bzw. imaginäre Teil von A. Für λ in Γ kann man eine solche positive Zahl η finden, dass im Gebiet $R[q] \geq 0$, $0 \leq I[q] \leq \eta$

$$sh\pi q - \lambda sh\theta q \text{ und } sh\pi q - \bar{\lambda} sh\theta q$$

ausser Null keine Nullstellen haben. Dies folgt aus der Tatsache, dass sämtliche Nullstellen ($\neq 0$) dieser Funktionen nicht reell sind, und dass sie innerhalb eines zur imaginären Achse parallelen Bandes von endlicher Breite liegen. Es ist auch möglich, η unabhängig von der Lage des Punktes λ in einem beliebig gegebenen, endlichen, inneren Teilgebiet Γ' von Γ zu wählen. Der Cauchysche Integralsatz auf das oben definierte unendliche Rechteck angewandt ergibt

$$\int_0^\infty sh\gamma q \left(\frac{1}{sh\pi q - \lambda sh\theta q} + \frac{1}{sh\pi q - \bar{\lambda} sh\theta q}\right) e^{iq|\sigma|} dq =$$

$$= \int_0^{i\eta} \cdots + \int_{i\eta}^{i\eta+\infty} sh\gamma q \left(\frac{1}{sh\pi q - \lambda sh\theta q} + \frac{1}{sh\pi q - \bar{\lambda} sh\theta q}\right) e^{iq|\sigma|} dq.$$

Da

$$sh\gamma q\left(\frac{1}{sh\pi q-\lambda sh\theta q}+\frac{1}{sh\pi q-\lambda sh\theta q}\right)$$

eine gerade reelle Funktion ist, so wird das erste Integral rechts rein imaginär. Auf analoge Weise erhält man, dass

$$I\left[\int_0^{i\eta} sh\gamma q\left(\frac{1}{sh\pi q-\lambda sh\theta q}-\frac{1}{sh\pi q-\lambda sh\theta q}\right)e^{iq|\sigma|}dq\right]=0.$$

Es folgt hieraus

(11) $E(\sigma,\gamma/\lambda)=$

$$=\frac{1}{2}R\left[\int_{i\eta}^{i\eta+\infty} sh\gamma q\left(\frac{1}{sh\pi q-\lambda sh\theta q}+\frac{1}{sh\pi q-\lambda sh\theta q}\right)e^{iq|\sigma|}dq\right]+$$

$$+\frac{1}{2}I\left[\int_{i\eta}^{i\eta+\infty} sh\gamma q\left(\frac{1}{sh\pi q-\lambda sh\theta q}-\frac{1}{sh\pi q-\lambda sh\theta q}\right)e^{iq|\sigma|}dq\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\int_{i\eta}^{i\eta+\infty}\frac{sh\gamma q\,e^{iq|\sigma|}}{sh\pi q-\lambda sh\theta q}dq+\frac{1}{2}\overline{\int_{i\eta}^{i\eta+\infty}\frac{sh\gamma q\,e^{iq|\sigma|}}{sh\pi q-\bar{\lambda}sh\theta q}dq}=$$

$$-\frac{e^{-\eta|\sigma|}}{2}\left\{\int_0^{\infty}\frac{sh\gamma(t+i\eta)\,e^{it|\sigma|}dt}{sh\pi(t+i\eta)-\lambda sh\theta(t+i\eta)}+\right.$$

$$\left.+\int_0^{\infty}\frac{sh\gamma(t-i\eta)\,e^{-it|\sigma|}dt}{sh\pi(t-i\eta)-\lambda sh\theta(t-i\eta)}\right\}.$$

Nun ergibt sich leicht die Ungleichung

(12) $$|E(\sigma,\gamma/\lambda)|<Be^{-\eta|\sigma|},$$

wo B eine Konstante (dieselbe für alle λ-Werte in Γ') ist. Falls $f(u)$ begrenzt ist, existiert somit

$$H_f(u, \gamma / \lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} E(u - \varkappa, \gamma / \lambda) f(\varkappa) d\varkappa = \int_{-\infty}^{+\infty} E(\varkappa, \gamma / \lambda) f(u + \varkappa) d\varkappa$$

als eine in Γ holomorphe Funktion von λ, die in bezug auf u begrenzt ist. Da $|\theta|$, $|\pi - \vartheta_1|$, $|\pi - \vartheta_2|$ kleiner als π sind, so stellt (9) eine Funktion $\mu(s)$ dar, die für begrenzte $f(s)$ hinsichtlich s begrenzt ist, und als Funktion von λ holomorph in einem Gebiete S, das aus der ganzen λ-Ebene besteht mit Ausschluss der reellen, der Bedingung $|\lambda\theta| > \pi$ genügenden Punkte.

Der Kern $G(s, t)$ von (1) schreibt sich

$$G(s, t) = \frac{1}{\pi} \frac{d}{dn_t} \left(\log \frac{1}{r_{st}} \right).$$

Aus Formel (3) erhält man für $p \sim (u, \vartheta)$, $q \sim (u', \vartheta')$

$$\frac{\partial}{\partial \vartheta'} \left(\log \frac{1}{r_{pq}} \right) = \frac{1}{2} \frac{\sin \vartheta'}{ch\, u' - \cos \vartheta'} - \frac{1}{2} \frac{\sin (\vartheta' - \vartheta)}{ch (u - u') - \cos (\vartheta - \vartheta')}.$$

Die Ableitung von $\log \frac{1}{r_{pq}}$ in bezug auf q, genommen in Richtung wachsender ϑ' längs der Linie $u' =$ konstant, ist

$$\frac{ch\, u' - \cos \vartheta'}{a} \frac{\partial}{\partial \vartheta'} \left(\log \frac{1}{r_{pq}} \right).$$

Wir unterscheiden vier Fälle:

1. $s \sim (u, \vartheta_1)$, $t \sim (\varkappa, \vartheta_1)$

$$G(s, t) = \frac{\sin \vartheta_1}{2\pi a}$$

2. $s \sim (u, \vartheta_1)$, $t \sim (\varkappa, \vartheta_2)$

$$G(s, t) = -\frac{\sin \vartheta_2}{2\pi a} + \frac{\sin \alpha}{2\pi a} \cdot \frac{ch \varkappa - \cos \vartheta_2}{ch (u - \varkappa) - \cos \alpha}$$

$$\alpha = \vartheta_2 - \vartheta_1$$

3. $s \sim (u, \vartheta_2)$, $t \sim (\varkappa, \vartheta_1)$

$$G(s, t) = \frac{\sin \vartheta_1}{2\pi a} + \frac{\sin \alpha}{2\pi a} \cdot \frac{ch \varkappa - \cos \vartheta_1}{ch (u - \varkappa) - \cos \alpha}$$

4. $s \sim (u, \vartheta_2)\ t \sim (x, \vartheta_2)$

$$G(s,t) = -\frac{\sin \vartheta_2}{2\pi a}.$$

Hieraus folgt, dass (1) gleichbedeutend mit dem System

$$\mu_1(u) - \frac{\lambda}{2\pi}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \vartheta_1}{ch x - \cos \vartheta_1}\mu_1(x)dx + \right.$$

$$+\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \alpha}{ch(u-x) - \cos \alpha}\mu_2(x)\,dx -$$

$$\left. -\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \vartheta_2}{ch x - \cos \vartheta_2}\mu_2(x)dx\right\} = f_1(u)$$

(13)

$$\mu_2(u) - \frac{\lambda}{2\pi}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \alpha}{ch(u-x) - \cos \alpha}\mu_1(x)dx + \right.$$

$$\left. +\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \vartheta_1}{ch x - \cos \vartheta_1}\mu_1(x)\,dx - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \vartheta_2}{ch x - \cos \vartheta_2}\mu_2(x)\,dx\right\} = f_2(u).$$

Wir wollen nun bestätigen, dass (9) diesem Gleichungssystem genügt. Hierbei tritt folgendes Integral auf

(14) $$\int_0^{\infty} \frac{\cos cx}{ch x + \cos b}dx = \frac{\pi}{\sin b}\frac{sh\, bc}{sh\, \pi c}.$$

Diese Relation ist ein Spezialfall einer von CAUCHY (Ann. Math. 17. Nismes. 1826) gegebenen Formel. Wir nehmen an (welche Einschränkung später beseitigt werden soll), dass $f(s)$ in den Eckpunkten auf solche Weise verschwindet, dass $\int_{-\infty}^{+\infty} |f_j(x)|\,dx$ $(j = 1, 2)$ existiert. Zuerst berechnen wir

$$A = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin\gamma}{ch(u-x)-\cos\gamma} H_f(x,\theta/\lambda)\,dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{0}^{\infty} \frac{\sin\gamma}{ch(u-x)-\cos\gamma} \frac{sh\theta q \cos q(x-\tau)}{sh\pi q - \lambda sh\theta q} f(\tau)\,dq\,d\tau\,dx.$$

Die Annahme

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(\tau)|\,d\tau \quad \text{konvergent}$$

ergibt, dass dieses Tripelintegral absolut konvergiert. Man kann also die Integrationsfolge beliebig wählen. Es folgt bei Anwendung von (14)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin\gamma}{ch(u-x)-\cos\gamma} \cos q(x-\tau)\,dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin\gamma}{chx-\cos\gamma} \cos q(u-\tau+x)\,dx =$$

$$= 2\cos q(u-\tau) \int_{0}^{\infty} \frac{\sin\gamma}{chx-\cos\gamma} \cos qx\,dx =$$

$$= 2\pi \cos q(u-\tau) \frac{sh(\pi-\gamma)q}{sh\pi q}.$$

Man erhält also

$$A = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{0}^{\infty} \frac{sh\theta q}{sh\pi q - \lambda sh\theta q} \frac{sh(\pi-\gamma)q}{sh\pi q} \cos q(u-\tau) f(\tau)\,dq\,d\tau =$$

$$= \frac{2\pi}{\lambda} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{0}^{\infty} \left(\frac{sh(\pi-\gamma)q}{sh\pi q - \lambda sh\theta q} - \frac{sh(\pi-\gamma)q}{sh\pi q} \right) \cos q(u-\tau) f(\tau)\,dq\,d\tau.$$

Somit

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin\gamma}{ch(u-x)-\cos\gamma} H_f(x,\theta/\lambda)dx =$$

(15)

$$= \frac{2\pi}{\lambda}[H_f(u,\pi-\gamma/\lambda) - H_f(u,\pi-\gamma/0].$$

Durch einen leichten Grenzübergang kann man zeigen, dass diese Formel für alle begrenzten f gilt. Es ist auch

$$\int_0^\infty \frac{sh\gamma q}{sh\pi q}\cos q\sigma\, dq = \frac{1}{2}\frac{\sin\gamma}{ch\sigma+\cos\gamma} \qquad (|\gamma|<\pi.)$$

(Vergl. Dürll. S. 105.) Hieraus folgt

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin\gamma}{ch(u-x)-\cos\gamma} f(x)dx = 2H_f(u,\pi-\gamma/0). \tag{16}$$

Wir bedürfen noch des Integrals

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin\gamma}{ch(u-x)-\cos\gamma} dx = 2(\pi-\gamma) \quad (0<\gamma<2\pi.) \tag{17}$$

Mit Hilfe von (15), (16) und (17) folgert man, dass (9) der Gleichung (13) genügt.

§ 8.

Die Integralgleichung

$$\mu(s) - \lambda\int_0^b [G(s,t) - G(2b-s,t]\mu(t)dt = f(s).$$

Der Kern $G(s,t)$ wird in zwei Punkten (s_1,s_1) und (s_2,s_2) unendlich. Es ist wichtig, die Lösung einer Integralgleichung

zu finden, deren Kern die auf S. 10 besprochene Singularität nur in einem einzigen Punkt besitzt. Wir wollen in diesem Paragraphen einen solchen Kern behandeln.

Auf dem im Vorigen betrachteten Kreiszweieck wird die Bogenlänge vom Punkte $(0, \vartheta_2)$ aus gerechnet. Es sei ferner $2b$ die gesamte Länge von C. Machen wir in (9) die Annahme $f(s) = -f(2b - s)$ oder, was dasselbe ist,

$$f_1(u) = -f_1(-u),\ f_2(u) = -f_2(-u),$$

so ergibt sich

$$\mu_1(u) = -\mu_1(-u),\ \mu_2(u) = -\mu_2(-u),$$

oder

$$\mu(s) = -\mu(2b - s). \tag{19}$$

Es gilt

$$\mu(s) - \lambda \int_0^b G(s,t)\,\mu(t)\,dt - \lambda \int_b^{2b} G(s,t)\,\mu(t)\,dt = f(s),$$

woraus gemäss (19) folgt

$$\mu(s) - \lambda \int_0^b \Big[G(s,t) - G(s, 2b - t)\Big]\mu(t)\,dt = f(s). \tag{20}$$

Wir setzen

$$N(s,t) = G(s,t) - G(s, 2b - t). \tag{21}$$

Im vorliegenden Falle verschwindet in (9) die Konstante k. (20) lässt sich somit für λ in S durch die Formeln

$$\begin{cases} \mu_1(u) = f_1(u) + \dfrac{\lambda}{\pi}\Big[H_{F_1}(u, \theta/\lambda) - H_{F_2}(u, \theta/-\lambda)\Big] \\ \mu_2(u) = f_2(u) + \dfrac{\lambda}{\pi}\Big[H_{F_1}(u, \theta/\lambda) + H_{F_2}(u, \theta/-\lambda)\Big] \end{cases} \tag{22}$$

auflösen. Wir beachten, dass $f(s)$, welche im Intervall $0 \leq s \leq b$ gegeben ist, im Gebiete $b < s < 2b$ als mittelst der Relation

$f(s) = -f(2b - s)$ fortgesetzt zu denken ist. Wir können (22) in der Form

$$\mu_1(u) = f_1(u) + \frac{\lambda}{2\pi}\left[\int_0^\infty A_1 f_1(\varkappa)\,d\varkappa + \int_0^\infty A_2 f_2(\varkappa)\,d\varkappa\right]$$

$$\mu_2(u) = f_2(u) + \frac{\lambda}{2\pi}\left[\int_0^\infty A_2 f_1(\varkappa)\,d\varkappa + \int_0^\infty A_1 f_2(\varkappa)\,d\varkappa\right]$$

schreiben, wo A_1 und A_2 folgende Funktionen sind

$$A_1 = E(u - \varkappa, \theta/\lambda) - E(u + \varkappa, \theta/\lambda) - \\ - E(u - \varkappa, \theta/-\lambda) + E(u + \varkappa, \theta/-\lambda)$$

$$A_2 = E(u - \varkappa, \theta/\lambda) - E(u + \varkappa, \theta/\lambda) + \\ + E(u + \varkappa, \theta/-\lambda) - E(u + \varkappa, \theta/-\lambda).$$

Die Funktion $N(s, t/\lambda)$ werde durch folgende Festsetzungen definiert:

1. $s \sim (u, \vartheta_2)$, $t \sim (\varkappa, \vartheta_2)$

$$N(s, t/\lambda) = \frac{ch\,\varkappa - \cos\vartheta_2}{2\pi a} A_1$$

2. $s \sim (u, \vartheta_2)$, $t \sim (\varkappa, \vartheta_1)$

$$N(s, t/\lambda) = \frac{ch\,\varkappa - \cos\vartheta_1}{2\pi a} A_2$$

3. $s \sim (u, \vartheta_1)$, $t \sim (\varkappa, \vartheta_2)$

$$N(s, t/\lambda) = \frac{ch\,\varkappa - \cos\vartheta_2}{2\pi a} A_2$$

4. $s \sim (u, \vartheta_1)$, $t \sim (\varkappa, \vartheta_1)$

$$N(s, t/\lambda) = \frac{ch\,\varkappa - \cos\vartheta_1}{2\pi a} A_1.$$

Wir können $\mu(s)$ mit Hilfe der Formel

$$\mu(s) = f(s) + \lambda \int_0^b N(s, t/\lambda)\, f(t)\, dt \tag{23}$$

darstellen. $N(s,t/\lambda)$ ist für $t \neq s_i$ stetig. Ferner gilt

$$\int_0^b |N(s,t/\lambda)|\, dt < c_1, \tag{24}$$

wo c_1 eine nur von λ abhängige Konstante bedeutet. Durch Einsetzen von (23) in (20) erkennt man die Gültigkeit der Gl.

$$N(s,t/\lambda) - \lambda \int_0^b N(s,t)\, N(\tau, t/\lambda)\, d\tau = N(s,t). \tag{25}$$

Sei $\nu(s)$ eine absolut integrierbare Lösung von

$$\nu(s) - \lambda \int_0^b N(t,s)\, \nu(t)\, dt = g(s). \tag{26}$$

Wir multiplizieren (26) mit $N(s, \tau/\lambda)$ und integrieren in Bezug auf s. Es ergibt sich mittels 25, dass $\nu(s)$ notwendig von der Form

$$\nu(s) = g(s) + \lambda \int_0^b N(t, s/\lambda)\, g(t)\, dt \tag{27}$$

sein muss. Nach den Ausführungen in § 2 ist (25) in einem Gebiete $|\lambda| < \lambda_0$ für z. B. stetige Funktionen tatsächlich lösbar. Hieraus folgert man wie oben die Gültigkeit der Gl.

$$N(s,t/\lambda) - \lambda \int_0^b N(s, \tau/\lambda)\, N(\tau, t)\, d\tau = N(s,t) \tag{28}$$

für $|\lambda| < \lambda_0$. Da die in diese Gleichung eingehenden Glieder in S holomorph sind, so folgt, dass (28) für alle λ in S gilt. Hieraus schliesst man wiederum leicht, dass (27) für alle

absolut integrierbare $g(s)$ und für alle λ in S eine Lösung (die einzige) von (26) darstellt.

Falls wir die Bezeichnungen

$$\nu_i^*(u) = \frac{a\,\nu_i(u)}{ch\,u - \cos\vartheta_i},\ g_i^*(u) = \frac{a\,g_i(u)}{ch\,u - \cos\vartheta_i}$$

$$Y_1(u) = \frac{g_1^*(u) + g_2^*(u)}{2},\ Y_2(u) = \frac{g_1^*(u) - g_2^*(u)}{2}$$

einführen, können wir (27) durch das System

$$\nu_1^*(u) = g_1^*(u) + \frac{\lambda}{\pi}\Big[H_{Y_1}(u,\theta/\lambda) - H_{Y_2}(u,\theta/-\lambda)\Big]$$

(28)

$$\nu_2^*(u) = g_2^*(u) + \frac{\lambda}{\pi}\Big[H_{Y_1}(u,\theta/\lambda) + H_{Y_2}(u,\theta/-\lambda)\Big]$$

ersetzen. $(g_i(u) = -g_i(-u))$

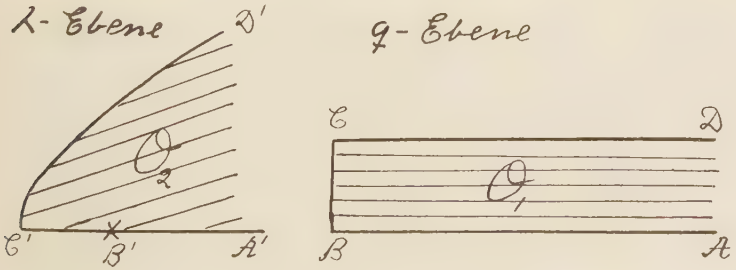
Ehe wir zur Behandlung der Integralgleichung für reelle, der Bedingung $|\lambda\theta| > \pi$ genügende Parameterwerte übergehen, empfiehlt es sich, einiges über die Nullstellen von

$$sh\,\pi q - \lambda\, sh\,\theta q$$

vorauszuschicken. Es gilt der Satz: Das Gebiet O_1 $(R[q] > 0,\ 0 \leq I[q] \leq 1)$ wird durch die Funktion

$$\lambda = \frac{sh\,\pi q}{sh\,\theta q}$$

konform auf einen schlichten Bereich O_2 der λ-Ebene abgebildet. Zum Beweise



werden die Werte von λ auf der Begrenzung von O_1 untersucht. Um einen bestimmten Fall zu betrachten, nehmen wir $\theta > 0$ an. Wenn q reell von $+\infty$ nach Null geht, variiert λ auf der positiven reellen Achse monoton von $+\infty$ bis $\frac{\pi}{\theta}$. Falls q auf BC liegt, also von der Form iq_2 (q_2 reell) ist, so geht $\lambda\left(=\frac{\sin \pi q_2}{\sin \theta q_2}\right)$ abnehmend von $\frac{\pi}{\theta}$ bis Null. Für q auf CD, d. h. $q = i + q_1 (q_1 > 0)$, haben wir

$$\frac{1}{\lambda} = -\cos\theta \frac{sh\,\theta q_1}{sh\,\pi q_1} - i \sin\theta \frac{ch\,\theta q_1}{sh\,\pi q_1}.$$

Reeller und imaginärer Teil sind hier monotone Funktionen von q_1. Es folgt, dass λ lauter verschiedene Werte annimmt, wenn q CD durchläuft. Ferner ist keiner von diesen reell. Wenn q_1 nach $+\infty$ geht, wächst der absolute Betrag von λ über alle Grenzen, während das Argument dem Grenzwert α zustrebt. Schliesslich gilt gleichmässig im Intervalle $0 \leq q_2 \leq 1$

$$\lim_{q_1 = \infty} \left| \frac{sh\,\pi (q_1 + iq_2)}{sh\,\theta (q_1 + iq_2)} \right| = \infty.$$

Nach einem bekannten Satz aus der Theorie der konformen Abbildung folgt aus diesen Tatsachen, dass die Funktion

$$\lambda = \frac{sh\,\pi q}{sh\,\theta q}$$

eine umkehrbar eindeutige Korrespondenz herstellt zwischen den Punkten in O_1 und O_2 einschliesslich der Berandung.

Die Gleichung

$$sh\,\pi q - \lambda\, sh\,\theta q = 0$$

besitzt also, wenn λ im Innern von O_2 liegt, eine und nur eine Wurzel $q(\lambda)$ innerhalb O_1. Dagegen gibt es für λ ausserhalb O_2 keine Wurzeln in diesem Bereich.

Es ist $q(\lambda)$ eine innerhalb Γ_1 ($= O_2$ + seinem Spiegelbild in bezug auf die reelle Achse) zweideutige für $\lambda \neq \frac{\pi}{\theta}$ reguläre Funktion. In der Umgebung von $\frac{\pi}{\theta}$ gilt die Entwicklung

$$(29)\quad q(\lambda) = \sqrt{\lambda - \frac{\pi}{\theta}}\, q_0(\lambda) = \sqrt{\frac{6\theta}{\pi(\pi^2 - \theta^2)}}\sqrt{\lambda - \frac{\pi}{\theta}} + \cdots,$$

wo $q_0(\lambda)$ in $\frac{\pi}{\theta}$ regulär ist.

Um die Integralgleichung (20) für $|\lambda\theta| > \pi$, $I[\lambda] = 0$ behandeln zu können müssen wir $H_f(u, \theta/\lambda)$ in der Nähe eines reellen der Bedingung $\lambda\theta > \pi$ genügenden Punktes untersuchen. Zu diesem Zwecke brauchen wir nur eine kleine Abänderung in den Ausführungen *S* 52 zu machen. Bei der dort ausgeführten komplexen Integration können wir für komplexe λ innerhalb Γ_1 die Grösse $\eta > 1$ wählen, falls wir das zum Pole $q(\lambda)$ bzw. $q(\lambda)$ gehörige Residuum berücksichtigen. Wenn λ auf derjenigen Seite der reellen Achse liegt, wo $I[q(\lambda)] > 0$[1], erhalten wir

$$(30)\quad E(\sigma, \gamma/\lambda) = \frac{\pi i\, sh\gamma\, q(\lambda)\, e^{iq(\lambda)|\sigma|}}{\pi\, ch\pi\, q(\lambda) - \lambda\theta\, ch\theta\, q(\lambda)} + E^*(\sigma, \gamma/\lambda)$$

$$E^*(\sigma, \gamma/\lambda) = \frac{e^{-\eta|\sigma|}}{2}\Big[\int_0^\infty \frac{sh\gamma(t + i\eta)\, e^{it|\sigma|}\, dt}{sh\pi(t + i\eta) - \lambda\, sh\theta(t + i\eta)} +$$

$$+ \int_0^\infty \frac{sh\gamma(t - i\eta)\, e^{-it|\sigma|}\, dt}{sh\pi(t - i\eta) - \lambda\, sh\theta(t - i\eta)}$$

$E^*(\sigma, \gamma/\lambda)$ ist in Γ_1 eine holomorphe Funktion von λ. Auf der reellen Achse nimmt sie reelle Werte an. Die Funktion

$$H^*_f(u, \gamma/\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} E^*(u - \varkappa, \gamma/\lambda) f(\varkappa)\, d\varkappa$$

ist ebenfalls holomorph in Γ_1.

Wir wollen nun die Bedingungen suchen, unter welchen $H_f(u, \theta/\lambda)$ einem Grenzwert zustrebt, wenn λ sich dem reellen Punkte λ_1 ($\lambda_1\theta > \pi$) auf der Kurve $R[q(\lambda)] = q(\lambda_1) = q_1$ nähert. Sei zunächst $I[q(\lambda)] = \varepsilon > 0$. Es kommt hier nur auf das Verhalten von

[1] Es handelt sich hier um denjenigen Zweig von $q(\lambda)$, der auf L positiv ist.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(q_1+i\varepsilon)|u-x|} f(x)\,dx$$

an. Wir haben bei Berücksichtigung der Gleichung

$$f(x) = -f(-x)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{(iq_1-\varepsilon)|u-x|} f(x)\,dx = -(e^{(iq_1-\varepsilon)u} - e^{-(iq_1-\varepsilon)u}) \int_0^{\infty} e^{(iq_1-\varepsilon)x} f(x)\,dx +$$

$$+ \int_0^{u} (e^{(iq_1-\varepsilon)(u-x)} - e^{(iq_1-\varepsilon)(x-u)}) f(x)\,dx.$$

Hieraus folgern wir, dass es für die Existenz von

$$\lim_{\varepsilon=0} H_f(u, \theta/\lambda)$$

notwendig und hinreichend ist, dass

$$\text{(31)} \qquad \begin{aligned} &\lim_{\varepsilon=0} \int_0^{\infty} e^{-\varepsilon x} f(x) \cos q_1 x\,dx = d_1 \\ &\lim_{\varepsilon=0} \int_0^{\infty} e^{-\varepsilon x} f(x) \sin q_1 x\,dx = d_2 \end{aligned}$$

existieren. In diesem Falle gilt:

$$\text{(32)} \qquad \lim_{\varepsilon=0} H_f(u, \theta/\lambda) = \frac{2\pi\, sh\,\theta q_1}{\pi\, ch\,\pi q_1 - \lambda_1\theta\, ch\,\theta q_1} \left[(d_1 + id_2) \sin q_1 u - \right.$$

$$\left. - \int_0^{u} \sin q_1 (u-x) f(x)\,dx \right] + H_f^*(u, \theta/\lambda_1).$$

Wir bemerken noch, dass während des Grenzüberganges

$$\text{(33)} \qquad |H_f(u, \theta/\lambda)| < C_0\, e^{\eta_0 u},$$

wo η_0 eine beliebig kleine positive Zahl bedeutet. Falls wir die Variable s durch

$$(34)\qquad \begin{aligned} s_1 - s &= a\int_u^\infty \frac{1}{ch\,x - \cos\vartheta_2}\,dx \quad (s<s_1)\\ s - s_1 &= a\int_u^\infty \frac{1}{ch\,x - \cos\vartheta_1}\,dx \quad (s>s_1) \end{aligned}$$

einführen[1], geht (33) über in

$$(35)\qquad |H_f(u,\theta/\lambda)| < C_1 |s - s_1|^{-\eta_0}.$$

Verschwindet die in (20) auftretende Funktion $f(s)$ auf eine solche Weise, dass die Integrale

$$(36)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty} |F_j(x)|\,dx \quad (j=1,2)$$

existieren, so existiert auch $\lim_{\varepsilon=0}\int_0^\infty e^{(i q_1 - \varepsilon)x} F_j(x)\,dx$. Unter der Voraussetzung, dass λ auf oben angegebene Weise gegen λ_1 konvergiert, strebt somit die durch (22) gegebene Lösung von (20) bestimmten Grenzwerten

$$(37)\qquad \begin{aligned} \lim \mu_1(u) &= f_1(u) + \frac{\lambda_1}{\pi}\Big[H^*_{F_1}(u,\theta/\lambda_1) - H_{F_2}(u,\theta/-\lambda_1)\Big] + D\\ \lim \mu_2(u) &= f_2(u) + \frac{\lambda_1}{\pi}\Big[H^*_{F_1}(u,\theta/\lambda_1) + H_{F_2}(u,\theta/-\lambda_1)\Big] + D \end{aligned}$$

zu. D ist gleich

$$D_1 = \frac{2\lambda_1 sh\,\theta q_1}{\pi\, ch\,\pi q_1 - \lambda_1 \theta\, ch\,\theta q_1}\Big[(d'_1 + i d'_2)\sin q_1 u - \int_0^u \sin q_1 (u-x) F_1(x)\,dx\Big]$$

[1] Es gilt asymptotisch $|s - s_1| \sim 2ae^{-u}$.

oder der Konjugierten D_1, je nachdem $I[q(\lambda)]$ sich dem Werte Null von der positiven oder negativen Seite nähert. d'_1 und d'_2 ergeben sich aus (31), falls wir dort $f(x)$ durch $F_1(x)$ ersetzen. Da wegen (35) der Grenzübergang unter dem Integralzeichen in (20) erlaubt ist, so stellen (37) eine Lösung von (20) für den Parameterwert λ_1 dar. Die Differenz $D_1 - D_1$ der beiden so erhaltenen Lösungen von (20) muss die zugehörige homogene Gleichung befriedigen. Es ist

$$D_1 - \overline{D}_1 = \frac{4 i \lambda_1 sh\theta q_1}{\pi ch \pi q_1 - \lambda_1 \theta ch \theta q_1} d'_2 \sin q_1 u.$$

Da $d'_2 = \int_0^\pi F_1(x) \sin q_1 x dx$ nicht für alle $f(s)$ verschwinden kann, ergibt sich folgendes: Zu jedem reellen der Bedingung $\lambda\theta > \pi$ genügenden λ-Wert besitzt die Gl.

$$\mu(s) - \lambda \int_0^b N(s,t)\mu(t)dt = 0 \tag{38}$$

eine begrenzte Lösung $U(s,\lambda)$, die durch

$$U_1(\lambda) = U_2(\lambda) = \sin q(\lambda) u$$

definiert wird. Für die übrigen in Γ_1 gelegenen λ-Werte $\left(\neq \frac{\pi}{\theta}\right)$ ist $U(s,\lambda)$ eine nicht beschränkte absolut integrierbare Lösung von (38).

Falls wir $U(s,\lambda_1)$ mit einer geeigneten Konstanten multiplizieren und von (37) subtrahieren ergibt sich, dass

$$(39)\begin{cases} \mu_1(u) = f_1(u) + \frac{\lambda_1}{\pi}[H^*_{F_1}(u,\theta/\lambda_1) - H_{F_2}(u,\theta/-\lambda_1)] - \\ \qquad - \frac{2\lambda_1 sh\theta q_1}{\pi ch \pi q_1 - \lambda_1 \theta ch \theta q_1} \int_0^u \sin q_1 (u-x) F_1(x) dx \\ \mu_2(u) = f_2(u) + \frac{\lambda_1}{\pi}[H^*_{F_1}(u,\theta/\lambda_1) + H_{F_2}(u,\theta/-\lambda_1)] - \\ \qquad - \frac{2\lambda_1 sh\theta q_1}{\pi ch \pi q_1 - \lambda_1 \theta ch \theta q_1} \int_0^u \sin q_1 (u-x) F_1(x) dx \end{cases}$$

eine Lösung von (20) für $\lambda = \lambda_1$ darstellt. Dies ist zunächst nur für den Fall, wo $f(s)$ (36) genügt, bewiesen. Sei nun $f(s)$ eine beliebige begrenzte Funktion. Wir definieren $f^{(l)}(s)$ folgendermassen:

$$f_1^{(l)}(u) = f_1(u), \quad f_2^{(l)}(u) = f_2(u) \quad (0 < u < l)$$
$$f_1^{(l)}(u) = f_2^{(l)}(u) = 0 \qquad (u > l)$$

Für $f(s) = f^{(l)}(s)$ liefert (39) eine Funktion $\mu^{(l)}(s)$, welche die Gl.

$$\mu^{(l)}(s) - \lambda_1 \int_0^b N(s,t)\,\mu^{(l)}(t)\,dt = f^{(l)}(s) \tag{40}$$

erfüllt. Es ist

$$\lim_{l=\infty} f^{(l)}(s) = f(s), \quad \lim_{l=\infty} \mu^{(l)}(s) = \mu(s).$$

Ferner gibt es zwei solche Konstanten C_2 und C_3, dass

$$\mu^{(l)}(s) < C_2 \log \frac{C_3}{|s - s_1|}.$$

Wir können also den Grenzübergang unter dem Integralzeichen in (40) vornehmen, woraus sich ergibt, dass (39) unsere Integralgleichung für alle begrenzten $f(s)$ löst.[1]

Es dürfte von Interesse sein zu bemerken, dass es beschränkte Funktionen $f(s)$ (z. B. $U(s, \lambda_1)$) gibt, für welche

$$\mu(s) - \lambda_1 \int_0^b N(s,t)\,\mu(t)\,dt = f(s)$$

keine beschränkte Lösung besitzt. Ein solches Verhalten kann nicht eintreffen, wenn λ in S liegt.

[1] Man kann auf dieselbe Weise zeigen, dass dies auch gültig ist, wenn wir nur voraussetzen, dass $\int_0^b |f(s)|\,ds$ existiert.

Auf ganz analoge Weise ergibt sich für den Fall

$$\lambda\theta < -\pi,\ I[\lambda] = 0$$

als Lösung von (20)

$$\mu_1(u) = f_1(u) + \frac{\lambda}{\pi}(H_{F_1}(u, \theta/\lambda) - H^*_{F_2}(u, \theta/-\lambda)) +$$

(41)

$$+ \frac{2\lambda sh\theta q(-\lambda)}{\pi ch\pi q(-\lambda) + \lambda\theta ch\theta q(-\lambda)} \int_0^u \sin q(-\lambda)(u-x) F_2(x) dx$$

$$\mu_2(u) = f_2(u) + \frac{\lambda}{\pi}[H_{F_1}(u, \theta/\lambda) + H^*_{F_2}(u, \theta/-\lambda)] -$$

$$- \frac{2\lambda sh\theta q(-\lambda)}{\pi ch\pi q(-\lambda) + \lambda\theta ch\theta q(-\lambda)} \int_0^u \sin q(-\lambda)(u-x) F_2(x) dx.$$

Die homogene Gleichung hat die durch

$$V_1(u, \lambda) = -V_2(u, \lambda) = -\sin q(-\lambda)u$$

definierte Lösung $V(s, \lambda)$. Dies gilt auch überall dort, wo $V(s, \lambda)$ absolut integrierbar bleibt, d. h. also in einem Gebiet Γ'_1, welches zu Γ_1 in bezug auf den Nullpunkt symmetrisch liegt.

Wir wollen nun noch einen sehr allgemeinen Fall erwähnen, wo der Grenzwert [32] existiert. Es wird die Existenz von

$$\lim_{u=\infty} f(u) = f(\infty)$$

und

$$\int_0^\infty |f(u) - f(\infty)| du$$

vorausgesetzt. Hieraus folgt

$$\lim_{\varepsilon=0}\int_0^\infty e^{(iq_1-\varepsilon)x}f(x)dx=\lim_{\varepsilon=\infty}f(\infty)\int_0^\infty e^{(iq_1-\varepsilon)x}dx+$$

$$+\lim_{\varepsilon=\infty}\int_0^\infty e^{(iq_1-\varepsilon)x}(f(x)-f(\infty)dx=\frac{if(\infty)}{q_1}+\int_0^\infty e^{iq_1x}(f(x)-f(\infty))dx.$$

Ferner gilt

$$\lim_{\varepsilon=0}H_f(u,\theta/\lambda)=$$

$$=\frac{2\pi sh\theta q_1}{\pi ch\pi q_1-\lambda_1\theta ch\theta q_1}\left\{e^{iq_1u}\left[\frac{f(\infty)}{q_1}+\int_0^\infty(f(x)-f(\infty))\sin q_1x\,dx\right]-\right.$$

$$\left.-\left[\frac{f(\infty)}{q_1}+\int_u^\infty\sin q(x-u)\,(f(x)-f(\infty))dx\right]\right\}+H^*_f(u,\theta/\lambda).\tag{42}$$

Wenn z. B. $f(s)$ für $s=s_1$ stetig ist und einer Lipschitzschen Bedingung in diesem Punkte genügt, so gilt

$$|F_i(u)-F_i(\infty)|<Ae^{-u}\quad(A=\text{Konstante}).$$

Da also

$$|(F_i(x)-F_i(\infty))\sin q(\lambda)x|<Ae^{-(1-\beta)x},$$

wenn λ einem Bereiche angehört, wo

$$|I[q(\lambda)]|<\beta<1,$$

so wird

$$\int_0^\infty(F_i(x)-F_i(\infty))\sin q(\lambda)x\,dx$$

gleichmässig konvergent. Durch weitere analoge Abschätzungen erhält man aus (42), dass sich $\mu(s)$ in der Umgebung von $\lambda=\lambda_1\,(I[q(\lambda)]>0)$ in der Form

(43) $$\mu(s) = a(\lambda)\, e^{iq(\lambda)u} + b(s, \lambda)$$

schreiben lässt, wo $a(\lambda), b(s, \lambda)$ für λ reell reelle Werte annehmen und in einem Gebiete $|\lambda - \lambda_1| < r_0$ holomorph sind. $b(s, \lambda)$ ist ausserdem eine stetige Funktion bezüglich s.

Ehe wir zur Behandlung der Gl. (26) für $\lambda = \lambda_1$ übergehen, wollen wir zeigen, dass (28)' auch dann eine Lösung von (26) darstellt, wenn nur die Integrierbarkeit von $g(s)$, d. h. die Existenz von

$$\int_0^b g(s)\, ds,$$

vorausgesetzt wird. Zu diesem Zwecke betrachten wir die Gl.

$$\mu(s) + \lambda \int_0^{2b} G(s, t)\, \mu(t)\, dt = f(s),$$

wo $f(s)$ durch

$$f(s) = \int_0^s g(\tau)\, d\tau \quad (0 < s < b)$$

$$f(2b - s) = f(s)$$

definiert ist. Durch Differenzieren ergibt sich

$$\mu'(s) + \lambda \int_0^{2b} G'_s(s, t)\, \mu(t)\, dt = g(s) \quad 0 \leq s \leq b.$$

Nach Plemelj (Jabl. Ges. § 33) haben wir

$$G'_s(s, t) = G'_t(t, s).$$

Durch partielle Integration folgt nun

$$\mu'(s) - \lambda \int_0^{2b} G(t, s)\, \mu'(t)\, dt = g(s).$$

Da die durch (9) gegebene Funktion $\mu(s)$ der Bedingung

$$\mu'(2b-s) = -\mu'(s)$$

genügt, gilt

$$\mu'(s) - \lambda \int_0^b N(t,s)\,\mu'(t)\,dt = g(s).$$

Differenzieren von (9) bestätigt, dass $\mu'(s)$ gerade die durch (28)', dargestellte Funktion ist. Aus der Formel

$$H_{Y_i}(u,\theta/\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} E'_u(u-\varkappa,\theta/\lambda)\,Z_i(\varkappa)\,d\varkappa, \tag{44}$$

wo

$$Z_i(u) = \int_0^u Y_i(\varkappa)\,d\varkappa,$$

ersehen wir, dass auch im vorliegenden Falle $\nu(s)$ innerhalb S eine reguläre analytische Funktion von λ wird.

Falls λ gegen λ_1 wie oben [S. 63] konvergiert, besitzt wegen (30) die durch (28)', definierte Funktion $\nu(s)$ dann und nur dann einen Grenzwert, wenn

$$\lim_{\varepsilon=0} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(iq_1-\varepsilon)|u-\varkappa|}\,Y_1(\varkappa)\,d\varkappa$$

existiert. Dies tritt tatsächlich ein, wenn

$$\int_0^\infty e^{iq_1\varkappa}\,Y_1(\varkappa)\,d\varkappa$$

konvergiert. Wir wollen nun untersuchen, wann bei angenommener Existenz der Integrale

$$\int_0^b g(s)\,ds, \qquad \int_0^\infty e^{iq_1\varkappa}\,Y_1(\varkappa)\,d\varkappa$$

der Grenzübergang unter dem Integralzeichen in (26) erlaubt ist. Aus (44) folgt

$$\int_0^u H_{Yi}(x, \theta / \lambda)\, dx = H_{Zi}(u, \theta / \lambda) - H_{Zi}(0, \theta / \lambda).$$

Also

$$\lim_{u=\infty} \int_0^u H_{Yi}(x, \theta / \lambda)\, dx = Z_i(\infty) \int_{-\infty}^{+\infty} E(x, \theta / \lambda)\, dx - H_{Zi}(0, \theta / \lambda).$$

Ferner gilt

$$I(u, \varepsilon) = \int_0^u d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(iq_1 - \varepsilon)|\tau - x|}\, Y_1(x)\, dx =$$

$$= \frac{1}{iq_1 - \varepsilon}\left[2\int_0^x e^{(iq_1 - \varepsilon)x}\, Y_1(x)\, dx - 2Z(u) + \right.$$

$$\left. + \int_{-\infty}^u e^{(iq_1 - \varepsilon)(u - x)}\, Y_1(x)\, dx - \int_u^x e^{(iq_1 - \varepsilon)(x - u)}\, Y_1(x)\, dx\right].$$

Man kann konstatieren, dass die Ungl.

$$|I(u, \varepsilon)| < C_0$$

gilt, wo C_0 eine von u und ε unabhängige Konstante bedeutet. Dies folgt *z. B.* für das letzte Glied aus der Formel

$$\left| e^{-(iq_1 - \varepsilon)u} \int_u^\infty e^{-\varepsilon x} e^{iq_1 x}\, Y_1(x)\, dx \right| = \left| \varepsilon\, e^{(\varepsilon - iq_1)u} \int_u^\infty e^{-\varepsilon x} L_1(x)\, dx \right|$$

$$< m(u)\, \varepsilon \int_u^\infty e^{-\varepsilon x}\, dx = m(u),$$

wo $L_1(x) = \int_u^x e^{iq_1 \tau}\, Y_1(\tau)\, d\tau$ und $m(u)$ das Maximum von $L_1(x)$

im Intervalle $u \leq x < \infty$ ist. Auf analoge Weise zeigt man

$$\lim_{u=\infty} I(u,\varepsilon) = \frac{2}{iq_1 - \varepsilon}\Big[\int_0^\infty e^{(iq_1-\varepsilon)x}\, Y_1(x)\,dx - \int_0^\infty Y_1(x)\,dx\Big].$$

Wenn wir dagegen zuerst ε nach Null konvergieren lassen, ergibt sich ein Ausdruck

$$\lim_{\varepsilon=0} I(u,\varepsilon) = \frac{2}{iq_1}\Big[\int_0^\infty e^{iq_1x}\, Y_1(x)\,dx - Z(u) -$$

$$- ie^{iq_1u}\int_0^\infty \sin q_1 x\, Y_1(x)\,dx - \int_u^\infty \cos q_1(x-u)\, Y_1(x)\,dx\Big],$$

welcher dann und nur dann für $u=\infty$ einen Grenzwert besitzt, wenn

$$\int_0^\infty \sin q_1 x\, Y_1(x)\,dx = 0.$$

In diesem Falle gilt

$$\lim_{\varepsilon=0}\lim_{u=\infty} I(u,\varepsilon) = \lim_{u=\infty}\lim_{\varepsilon=0} I(u,\varepsilon). \tag{45}$$

Um die Abhängigkeit von ε hervorzuheben, schreiben wir $\nu(s,\varepsilon)$ statt $\nu(s)$. Durch partielle Integration erhält man

$$\int_0^{s_1} N(t,s)\,\nu(t,\varepsilon)\,dt = \omega(s_1,\varepsilon)\,N(s_1,s) - \int_0^{s_1} N'_t(t,s)\,\omega(t,\varepsilon)\,dt, \tag{46}$$

wo $\omega(s,\varepsilon) = \int_0^s \nu(t,\varepsilon)\,dt$ gesetzt ist. Für $s \sim (u,\vartheta_2)$, $I[q(\lambda)] = q_1 + i\varepsilon\,(\varepsilon > 0)$ haben wir

$$\omega(s,\varepsilon) = \int_0^u g^*_2(x)\,dx + \frac{\lambda}{\pi}\Big[\int_0^u H^*_{Y_1}(x,\theta/\lambda)\,dx +$$

$$+ \int_0^u H_{Y_2}(x,\theta\ -\lambda)\,dx\Big] + \frac{\lambda\, i\, sh\,\theta q}{\pi\, ch\,\pi q - \lambda\theta\, ch\,\theta q}\, I(u,\varepsilon).$$

Diese Formel ergibt, falls wir die vorangehenden Ausführungen berücksichtigen, dass

$$|\omega(s,\varepsilon)| < C_1 \ (C_1 = \text{Konstante}).$$

Ferner gilt, wenn wir die Bezeichnung

$$\nu(t,0) = \lim_{\varepsilon=0} \nu(t,\varepsilon)$$

anwenden,

$$\lim_{\varepsilon=0} \omega(s,\varepsilon) = \int_0^s \nu(t,0)\,dt \ (s < s_1).$$

Man kann somit aus (46) folgern;

$$\lim_{\varepsilon=0} \int_0^{s_1} N(t,s)\,\nu(t,\varepsilon)\,dt = N(s_1,s) \lim_{\varepsilon=0} \omega(s_1,\varepsilon) -$$

$$- \int_0^{s_1} N'_t(t,s) \int_0^t \nu(\tau,0)\,d\tau\,dt.$$

Falls

$$\lim_{\varepsilon=0} \omega(s_1,\varepsilon) = \int_0^{s_1} \nu(\tau,0)\,d\tau, \tag{47}$$

können wir die Integration rückgängig machen und erhalten so

$$\lim_{\varepsilon=0} \int_0^{s_1} N(t,s)\,\nu(t,\varepsilon)\,dt = \int_0^{s_1} N(t,s)\,\nu(t,0)\,dt.$$

Die notwendige und hinreichende Bedingung für das Erfülltsein von (47) ist (nach (45))

$$(48) \qquad 2\int_0^\infty \sin q_1 x\, Y_1(x)\,dx = \int_0^b U(s,\lambda_1)\,g(s)\,ds = 0.$$

Man zeigt ganz analog, dass diese Relation die Limes-Gleichung

$$\lim_{\varepsilon=0}\int_{s_1}^b N(t,s)\,\nu(t,\varepsilon)\,dt = \int_{s_1}^b N(t,s)\,\nu(t,0)\,dt$$

mit sich führt. Es gilt also folgendes: Die Gl. (26) wird, wenn

$$\int_0^b g(s)\,ds,\quad \int_0^\infty e^{iq_1 x}\,g^*_j(x)\,dx$$

konvergieren und wenn $g(s)$ orthogonal zu $U(s,\lambda_1)$ ist, durch die Formeln

$$(49)\quad \begin{aligned}
\nu^*_1(u) &= g^*_1(u) + \frac{\lambda_1}{\pi}\Big[H^*_{Y_1}(u,\theta/\lambda_1) - H_{Y_2}(u,\theta/-\lambda_1)\Big] - \\
&\quad - \frac{2\lambda_1 sh\,\theta q_1}{\pi\, ch\,\pi q_1 - \lambda_1\theta\, ch\,\theta q_1}\int_u^\infty \sin q_1(x-u)\,Y_1(x)\,dx \\
\nu^*_2(u) &= g^*_2(u) + \frac{\lambda_1}{\pi}\Big[H^*_{Y_1}(u,\theta/\lambda_1) + H_{Y_2}(u,\theta/-\lambda_1)\Big] - \\
&\quad - \frac{2\lambda_1 sh\,\theta q_1}{\pi\, ch\,\pi q_1 - \lambda_1\theta\, ch\,\theta q_1}\int_u^\infty \sin q_1(x-u)\,Y_1(x)\,dx
\end{aligned}$$

aufgelöst. Diese Lösung ist sicher absolut integrierbar, wenn

$$\int_0^b \log\frac{1}{|s-s_1|}|g(s)|\,ds$$

existiert. Die Notwendigkeit der Bedingung (48) geht, falls $\nu(s)$ absolut integrierbar angenommen wird, unmittelbar aus

der Tatsache hervor, dass $U(s, \lambda_1)$ die zu (26) transponierte homogene Gleichung befriedigt. Man kann auch dann die Notwendigkeit noch beweisen, wenn $\nu(s)$ nicht absolut integrierbar ist. Gl. (48) stellt auch die Bedingung dar, unter welcher die Grenzwerte, denen $\nu(s)$ zustrebt, wenn sich λ von der oberen bzw. unteren Halbebene dem Punkte λ_1 nähert, einander gleich sind.

Wenn (48) nicht erfüllt ist, so wird $\int_0^s \nu(t,0)\,dt$ oszillierend; jedoch existiert

$$\lim_{\mu=0} \int_0^b \nu(t,0)\,|t-s_1|^\mu\,dt.$$

Man kann auch zeigen, dass $\nu(t,0)$ immer eine Lösung von (26) darstellt, falls wir nur unter

$$\int_0^b N(t,s)\,\nu(t,0)\,dt$$

den Grenzwert

$$\lim_{\mu=0} \int_0^b N(t,s)\,\nu(t,0)\,|t-s_1|^\mu\,dt$$

verstehen.

Wenn λ die Bedingungen $I[\lambda]=0, \lambda\theta<-\pi$ erfüllt, hat (26) die Lösung

$$\begin{aligned}\nu^*_1(u) &= g^*_1(u)+\frac{\lambda}{\pi}\Big[H_{Y_1}(u,\theta/\lambda)-H^*_{Y_2}(u,\theta/-\lambda)\Big]+B\\ \nu^*_2(u) &= g^*_2(u)+\frac{\lambda}{\pi}\Big[H_{Y_1}(u,\theta/\lambda)+H^*_{Y_2}(u,\theta/-\lambda)\Big]-B\end{aligned} \tag{50}$$

$$B=\frac{2\lambda\,sh\,\theta\,q(-\lambda)}{\pi\,ch\,\pi\,q(-\lambda)+\lambda\theta\,ch\,\theta\,q(-\lambda)}\int_u^\infty \sin q(-\lambda)(x-u)\,Y_2(x)\,dx,$$

falls $g(s)$ zu $V(s,\lambda)$ orthogonal ist.

Wir werden nun die Gleichungen (20) und (26) für $\lambda = \pm \frac{\pi}{\theta}$ behandeln. Die Funktion

$$\Xi(s) = \lim_{\lambda = \frac{\pi}{\theta}} \frac{U(s, \lambda)}{q(\lambda)},$$

für welche

$$\Xi_1(u) = \Xi_2(u) = u,$$

genügt der Gleichung

$$\Xi(s) - \frac{\pi}{\theta} \int_0^b N(s, t)\, \Xi(t)\, dt = 0.$$

Diese Lösung wächst bei $s = s_1$ wie $\log \frac{1}{|s - s_1|}$. Unter Berücksichtigung der Formel (29) oder der daraus folgenden Entwicklung

$$\lambda - \frac{\pi}{\theta} = \frac{\pi(\pi^2 - \theta^2)}{6\theta} q^2 + \cdots$$

ergibt sich aus (39), indem wir dort q_1 nach Null konvergieren lassen,

$$\mu_1(u) = f_1(u) + \frac{1}{\theta}\left[H^*_{F_1}\left(u, \theta / \frac{\pi}{\theta}\right) - H_{F_2}\left(u, \theta / -\frac{\pi}{\theta}\right)\right] - \\ - \frac{6}{\pi^2 - \theta^2} \int_0^u (u - \varkappa)\, F_1(\varkappa)\, d\varkappa$$

(51)

$$\mu_2(u) = f_2(u) + \frac{1}{\theta}\left[H^*_{F_1}\left(u, \theta / \frac{\pi}{\theta}\right) + H_{F_2}\left(u, \theta / -\frac{\pi}{\theta}\right)\right] - \\ - \frac{6}{\pi^2 - \theta^2} \int_0^u (u - \varkappa)\, F_1(\varkappa)\, d\varkappa$$

als Lösung von (20) für $\lambda = \frac{\pi}{\theta}$. Dies gilt sicher, wenn $\int_0^b |f(s)|\,ds$ existiert.

Um unter der Bedingung

$$\int_0^b g(s)\,\Xi(s)\,ds = 0 \tag{52}$$

zu einer Lösung von

$$\nu(s) - \frac{\pi}{\theta}\int_0^b N(t,s)\,\nu(t)\,dt = g(s) \tag{53}$$

zu gelangen, ersetzen wir in (49) $g(s)$ durch

$$\gamma(s,\lambda) = g(s) - U(s,\lambda)\,\frac{\int_0^b U(t,\lambda)\,g(t)\,dt}{\int_0^b U(t,\lambda)^2\,dt}$$

und lassen q sich Null nähern. Dabei wird

$$\lim_{\lambda = \frac{\pi}{\theta}} \gamma(s,\lambda) = g(s),$$

falls $\int_0^b \log\frac{1}{|s-s_1|}\,g(s)\,ds$ absolut konvergiert, was wir annehmen wollen. Hieraus folgt

$$\lim \frac{2\lambda\,sh\,\theta q}{\pi\,ch\,\pi q - \lambda\theta\,ch\,\theta q}\int_u^\infty \sin q(x-u)\,Y_1(x)\,dx =$$

$$= \frac{6}{\pi^2-\theta^2}\int_u^\infty (x-u)\,Y_1(x)\,dx = B_1.$$

Man bestätigt ohne Schwierigkeiten, dass, falls

$$\int_0^b \left[\log \frac{1}{|s - s_1|}\right]^2 |g(s)|\, ds$$

existiert, $|\nu(s)|$ während des Grenzüberganges kleiner als eine von λ unabhängige absolut integrierbare Funktion bleibt. Somit können wir den Grenzübergang unterm Integralzeichen in (26) ausführen und erkennen auf diese Weise, dass die Funktion

$$(54)\quad \begin{aligned} \nu_1^*(u) &= g_1^*(u) + \frac{1}{\theta}\left[H^*\left(u, \theta \,/\, \frac{\pi}{\theta}\right) - H\left(u, \theta \,/\, -\frac{\pi}{\theta}\right)\right] - B_1 \\ \nu_2^*(u) &= g_2^*(u) + \frac{1}{\theta}\left[H^*\left(u, \theta \,/\, \frac{\pi}{\theta}\right) + H\left(u, \theta \,/\, -\frac{\pi}{\theta}\right)\right] - B_1 \end{aligned}$$

(26) für $\lambda = \frac{\pi}{\theta}$ befriedigt.[1]

Analog erhält man für den Parameterwert $-\frac{\pi}{\theta}$ die Lösungen

$$(55)\quad \begin{aligned} \mu_1(u) &= f_1(u) - \frac{1}{\theta}\left[H_{F_1}\left(u, \theta \,/\, -\frac{\pi}{\theta}\right) - H^*_{F_2}\left(u, \theta \,/\, \frac{\pi}{\theta}\right)\right] - B_2 \\ \mu_2(u) &= f_2(u) - \frac{1}{\theta}\left[H_{F_1}\left(u, \theta \,/\, -\frac{\pi}{\theta}\right) + H^*_{F_2}\left(u, \theta \,/\, \frac{\pi}{\theta}\right)\right] + B_2 \end{aligned}$$

$$B_2 = \frac{6}{\pi^2 - \theta^2} \int_0^u (u - \varkappa)\, F_2(u)\, d\varkappa$$

bzw.

$$(56)\quad \begin{aligned} \nu_1^*(u) &= g_1^*(u) - \frac{1}{\theta}\left[H_{Y_1}\left(u, \theta \,/\, -\frac{\pi}{\theta}\right) - H^*_{Y_2}\left(u, \theta \,/\, \frac{\pi}{\theta}\right)\right] - B_3 \\ \nu_2^*(u) &= g_2^*(u) - \frac{1}{\theta}\left[H_{Y_1}\left(u, \theta \,/\, -\frac{\pi}{\theta}\right) + H^*_{Y_2}\left(u, \theta \,/\, \frac{\pi}{\theta}\right)\right] + B_3 \end{aligned}$$

$$B_3 = \frac{6}{\pi^2 - \theta^2} \int_u^\infty (\varkappa - u)\, Y_2(\varkappa)\, d\varkappa .$$

[1] Dieser Ausdruck stellt auch eine Lösung dar unter der allgemeineren Voraussetzung, dass die Integrale $\int_0^\infty Y_1(\varkappa)$, $\int_0^\infty \varkappa\, Y_1(\varkappa)\, d\varkappa$, $\int_0^\infty \varkappa^2\, Y_1(\varkappa)\, d\varkappa$ existieren.

Für die Gültigkeit der letztgenannten Auflösungsformel ist erforderlich, dass

$$\int_0^b g(s)\,W(s)\,ds = 0,$$

wo $W(s)$ durch

$$W_2(u) = -W_1(u) = u$$

definiert ist und der Gleichung

$$W(s) + \frac{\pi}{\theta}\int_0^b N(s,t)\,W(t)\,dt = 0$$

genügt.

Wir gehen nun auf die Frage ein, in wie weit die bis jetzt angegebenen Lösungen die einzigen sind. Zu diesem Zwecke beweisen wir zunächst einen Hilfssatz. Sei G die Gesamtheit aller Funktionen $g(s)$ (im Intervalle $0 < s < b$), zu welchen es eine solche positive Grösse d gibt, dass

$$g(s) = 0 \qquad (|s - s_1| < d),$$

während $g(s)$ für $|s - s_1| > d$ stetig ist. Ferner mögen $\varphi_1, \varphi_2, \cdots \varphi_n, \psi$ gegebene für $s \neq s$, stetige Funktionen sein; $\varphi_1, \varphi_2, \cdots \varphi_n$ nehmen wir linear unabhängig an. Wenn für alle $g(s)$ in G, welche den Bedingungen

$$\int_0^b g(s)\,\varphi_i(s)\,ds = 0 \qquad (i = 1, 2 \cdots n)$$

genügen, die Gleichung

$$\int_0^b g(s)\,\psi(s)\,ds = 0$$

erfüllt ist, so muss $\psi(s)$ eine lineare Kombination von $\varphi_1, \varphi_2, \cdots \varphi_n$ mit konstanten Koeffizienten sein.

Zum Beweise führen wir eine für $s \neq s_1$ positive stetige Funktion $\varrho(s)$ ein, die so beschaffen ist, dass

$$\varphi_i^*(s) = \varrho(s)\,\varphi_i(s) \quad (i = 1, 2 \cdots n)$$
$$\psi^*(s) = \varrho(s)\,\psi(s)$$

auch im Punkte s_1 stetig ausfallen. Es folgt, dass für $g(s)$ in G die Gleichungen

$$\int_0^b g(s)\,\varphi_i^*(s)\,ds = 0$$

die Relation

$$\int_0^b g(s)\,\psi^*(s)\,ds = 0$$

mit sich ziehen. Wir bilden durch ein bekanntes Orthogonalisierungsverfahren ein mit $\varphi_1^*, \varphi_2^*, \cdots \varphi_n^*$ linear äquivalentes System $\Phi_1, \Phi_2 \cdots \Phi_n$, welches den Relationen

$$\int_0^b \Phi_i(s)\,\overline{\Phi_k(s)}\,ds = \begin{cases} 1 & (i = k) \\ 0 & (i \neq k) \end{cases}$$

genügt. Wenn $g(s)$ zu G gehört und die Bedingungen

$$\int_0^b g(s)\,\Phi_i(s)\,ds = 0$$

erfüllt, folgt

$$\int_0^b g(s)\,\psi^*(s)\,ds = 0.$$

Wir wollen zeigen, dass diese Aussage auch gültig bleibt, wenn wir $g(s)$ durch eine beliebige stetige Funktion $f(s)$ ersetzen. Sei

$$f^{(\delta)}(s) = 0 \qquad (|s - s_1| < \delta)$$
$$f^{(\delta)}(s) = f(s) \quad (|s - s_1| \geq \delta),$$

wo $f(s)$ die Gl.

$$\int_0^b f(s)\, \Phi_i(s)\, ds = 0 \quad (i = 1, 2 \cdots n) \tag{57}$$

befriedigt. $\Phi_i^{(\delta)}(s)$ wird auf analoge Weise definiert. Die Grössen $x_1, x_2 \cdots x_n$ können so bestimmt werden, dass

$$\int_0^b \left[f^{(\delta)}(s) + \sum_{i=1}^{n} x_i\, \Phi_i^{(\delta)}(s) \right] \Phi_\mu(s)\, ds = 0 \quad (p = 1, 2 \cdots n). \tag{58}$$

Bei Berücksichtigung von (57) geht dieses System über in

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \int_0^b \Phi_p(s)\, \overline{\Phi_i^{(\delta)}}\,(s)\, ds = \int_{s_1-\delta}^{s_1+\delta} \Phi_p(s)\, f(s)\, ds.$$

Da, wenn δ nach Null geht, die Determinante dieser Gleichungen dem Grenzwert 1 zustrebt, haben wir

$$\lim_{\delta = 0} x_i = 0.$$

Wegen (58) gilt

$$\int_0^b \psi^*(s) \left[f^{(\delta)}(s) + \sum_{i=1}^{n} x_i\, \overline{\Phi_i^{(\delta)}}\,(s) \right] ds = 0$$

Durch Grenzübergang ergibt sich nun die zu beweisende Gl.

$$\int_0^b \psi^*(s)\, f(s)\, ds = 0.$$

Die Funktion

$$\overline{\psi^*}(s) - \sum_{i=1}^{n} \Phi_i(s) \cdot \int_0^b \overline{\psi^*(t)}\, \Phi_i(t)\, dt$$

ist zu $\Phi_1, \Phi_2 \cdots \Phi_n$ orthogonal. Also gilt

$$\int_0^b \left[\psi^*(s) - \sum_{i=1}^{n} \Phi_i(s) \int_0^b \psi^*(t) \Phi_i(t) dt \right] \psi^*(s) ds = 0.$$

Hieraus folgt leicht die Gleichung

$$\left[\psi^*(s) - \sum_{i=1}^{n} \Phi_i(s) \int_0^b \psi^*(t) \Phi_i(t) dt \right] \left[\psi^*(s) - \sum_{i=1}^{n} \Phi_i(s) \int_0^b \psi^*(t) \Phi_i(t) dt \right] ds = 0$$

d. h.

$$\int_0^b \left| \psi^*(s) - \sum_{i=1}^{n} \Phi_i(s) \int_0^b \psi^*(t) \Phi_i(\bar{t}) dt \right|^2 ds = 0.$$

Somit haben wir

$$\psi^*(s) - \sum_{i=1}^{n} \Phi_i(s) \int_0^b \psi^*(t) \Phi_i(\bar{t}) dt = 0.$$

Durch Wegdividieren des gemeinsamen Faktors $\varrho(s)$ ergibt sich

$$\psi(s) = c_1 \varphi_1(s) + c_2 \varphi_2(s) \cdots + c_n \varphi_n(s),$$

wo $c_1, c_2 \cdots c_n$ Konstanten sind. Hiermit ist der Beweis unseres Hilfsatzes erbracht.

Die Resolventengleichungen (25) und (28) in Verbindung mit der Ungleichung (24) ergeben auf bekannte Weise, dass die zu (20) und (26) gehörigen homogenen Gleichungen keine von Null verschiedene beschränkte bzw. absolut integrierbare Lösungen haben können, wenn λ in S liegt. Es ist nicht schwierig, bei Benutzung der Tatsache, dass $G(s, t)$ die Ableitung in bezug auf t einer symmetrischen Funktion ist, zu zeigen, dass (26) für $g(s) = 0$ nicht einmal eine integrierbare Lösung besitzt.

Für $\lambda\theta > \pi$, $I[\lambda] = 0$ hat

$$\nu(s) - \lambda \int_0^b N(t, s) \nu(t) dt = g(s) \tag{59}$$

zu jedem $g(s)$ in G eine durch (49) gegebene absolut integrierbare Lösung $\nu(s)$, falls die Bedingung

$$\int_0^b g(s)\,U(s,\lambda)\,ds = 0$$

erfüllt ist. Sei nun $\varphi(s)$ eine beliebige, der Gl.

$$\varphi(s) - \lambda \int_0^b N(s,t)\varphi(t)\,dt = 0 \tag{60}$$

genügende beschränkte Funktion. Durch Multiplizieren von (59) mit $\varphi(s)$ und darauf folgende Integration ergibt sich

$$\int_0^b g(s)\varphi(s)\,ds = 0.$$

Unser Hilfsatz gibt also

$$\varphi(s) = c\,U(s,\lambda)$$

d. h.: jede begrenzte Lösung von (60) unterscheidet sich von $U(s,\lambda)$ nur durch einen konstanten Faktor. Analoges gilt für $\lambda\theta < -\pi$, $I[\lambda] = 0$.

Wir wollen nun zeigen, dass es ausser $U(s,\lambda)$ keine andere absolut integrierbare Lösung von (60) gibt, wenn λ in $\Gamma_1 - (\Gamma_1\Gamma'_1)$ liegt. $(\Gamma_1\Gamma'_1)$ bedeutet das für Γ_1 und Γ'_1 gemeinsame Gebiet. Gl. (59) hat die Lösung

$$\nu^*_j(u) = g^*_j(u) + \frac{\lambda}{\pi}[H^*_{Y_1}(u,\theta/\lambda) + (-1)^j H_{Y_2}(u,\theta/-\lambda)] +$$

$$+ \frac{\lambda i \sin\theta q(\lambda)}{\pi \cos\pi q(\lambda) - \lambda\theta\cos\theta q(\lambda)} B_4$$

$$B_4 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iq(\lambda)|u-x|}\,Y_1(x)\,dx.$$

Da, wenn $g(s)$ zu G gehört, eine solche Zahl $\varkappa_0(d)$ gefunden werden kann, dass

$$Y_1(\varkappa) = Y_2(\varkappa) = 0 \quad (\varkappa > \varkappa_0(d)),$$

so gilt

$$B_4 = e^{iq(\lambda)u} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iq(\lambda)\varkappa} Y_1(\varkappa) d\varkappa =$$

$$= -2ie^{iq(\lambda)u} \int_{-\infty}^{+\infty} \sin q(\lambda)\varkappa \, Y_1(\varkappa) d\varkappa = -ie^{iq(\lambda)u} \int_0^b U(s, \lambda) g(s) ds$$

für $u > \varkappa_0(d)$. Falls wir nun die Annahme

$$\int_0^b U(s, \lambda) g(s) ds = 0 \tag{61}$$

machen, so wird B_4 in der Nähe von $s = s_1$ gleich Null. Ferner gelten für $u > \varkappa_0(d)$

$$|H^*_{Y_1}(u, \theta/\lambda)| < c \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\eta|u-\varkappa|} |Y_1(\varkappa)| d\varkappa =$$

$$= ce^{-\eta u} \int_{-\varkappa_0(d)}^{+\varkappa_0(d)} e^{\eta\varkappa} |Y_1(\varkappa)| d\varkappa$$

$$|H_{Y_2}(u, \theta/-\lambda)| < ce^{-\eta u} \int_{-\varkappa_0(d)}^{+\varkappa_0(d)} e^{\eta\varkappa} |Y_2(\varkappa)| d\varkappa,$$

wo c und η Konstanten sind (η grösser als Eins.). Es folgt hieraus, dass eine solche positive Zahl c_1 existiert, dass

$$|\nu(s)| < c_1 |s - s_1|^{\eta-1}.$$

Also gilt

$$\int_0^b |\nu(t)| \cdot |N(t,s)| dt < c_2 \tag{62}$$

(c_2 = Konstante)

Sei nun $\varphi(s)$ eine absolut integrierbare Lösung von (60). Wir multiplizieren (59) mit $\varphi(s)$ und integrieren in bezug auf s. Da wegen (62)

$$\int_0^b \int_0^b N(t,s)\nu(t)\varphi(s)dtds$$

absolut konvergiert, können wir die Integrationsfolge vertauschen und erhalten somit

$$\int_0^b \varphi(s)g(s)ds = 0,$$

und zwar unter der einzigen Bedingung (61). Also gilt

$$\varphi(s) = c_3 U(s,\lambda)$$

w. z. b. w. Auf ganz analoge Weise zeigt man: Für λ in $\Gamma'_1 - (\Gamma_1\Gamma'_1)$ oder in $(\Gamma_1\Gamma'_1)$ sind

$$c_4 V(s,\lambda)$$

bzw.

$$c_5 U(s,\lambda) + c_6 V(s,\lambda)$$

(c_4, c_5, c_6 willkürliche Konstanten)

die einzigen absolut integrierbaren Lösungen von (60). Wenn λ ausserhalb sowohl Γ_1 als Γ'_1 liegt, besitzt (60) keine absolut integrierbare Lösung.

Wir können mittels der hier angegebenen Methode ohne Schwierigkeiten auch zeigen, dass die im Vorigen für $\lambda = \pm \frac{\pi}{\theta}$ angegebenen Lösungen $\Xi(s)$ und $W(s)$ die einzigen absolut integrierbaren sind, und weiter noch, dass die zu (26) gehörige homogene Gleichung für keinen λ-Wert eine absolut integrierbare Lösung haben kann.

§ 9.

Die vollständige Auflösung der Gleichung

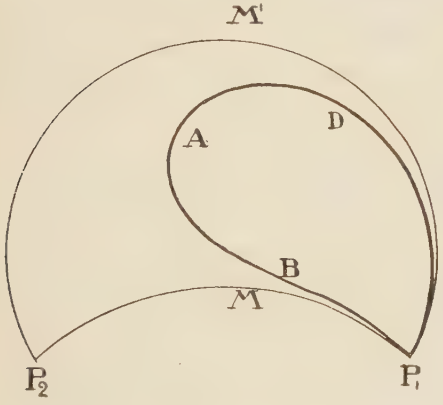
$$\varphi(x) - \lambda \int_{C} \frac{\cos(r_{yx} n_y)}{\pi r_{xy}} \varphi(y)\, dy = f(x)$$

für ein beliebiges Gebiet mit einer Ecke.

Sei C eine beliebige Kurve mit einer einzigen Ecke P_1. Wir nennen die Bogenlänge vom Punkte A aus gerechnet x oder y und setzen

$$K(x, y) = \frac{1}{\pi} \frac{\cos(r_{yx} n_y)}{r_{yx}}.$$

Zu P_1 möge die Bogenlänge x_1 gehören. Sei l die gesamte Länge von C. Es wird die Annahme gemacht, dass die Koordinaten der Punkte auf C samt ihren drei ersten Ableitungen im Intervalle $x_1 \leq x \leq x_1 + l$ stetige Funktionen von x sind. Wir konstruieren in P_1 die beiden Oskulationskreise und erhalten so ein Kreiszweieck $P_1 M' P_2 M P_1$[1], auf welches wir die vorigen Bezeichnungen anwenden. Man kann eine monotone, beliebig oft stetig differentiierbare Funktion $x = \xi(s)$ finden, durch welche C auf den Kurventeil $M P_1 M'$[2] derart bezogen wird, dass $A B P_1$ und $M P_1$ bzw. $P_1 D A$ und $P_1 M'$ einander entsprechen. Ferner können wir erreichen, dass in einer gewissen Umgebung von s_1



[1] Man kann ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass diese Kreise nicht beide Geraden sind, weil eine Transformation mit reziproken Radien, die unsre Integralgleichung auf einfache Weise transformiert, diesen Fall ausschliessen lässt.

[2] $M \sim (0, \vartheta_2)$, $M' \sim (0, \vartheta_1)$.

$$\xi(s) - x_1 = s - s_1 .$$

Die Integralgleichung

$$(63)\quad \varphi(x) - \lambda \int_0^l K(x\ y)\,\varphi(y)\,dy = f(x)$$

lässt sich mittels $\xi(s)$ folgendermassen transformieren:

$$\varphi(\xi(s)) - \lambda \int_0^b K(\xi(s), \xi(t))\,\xi'(t)\,\varphi(\xi(t))\,dt = f(\xi(s)).$$

Wir setzen

$$(64)\quad \begin{cases} \varphi(\xi(s)) = \mu(s) \\ K(\xi(s), \xi(t))\,\xi'(t) = H(s,t) \\ f(\xi(s)) = h(s). \end{cases}$$

Es gilt also

$$(65)\quad \mu(s) - \lambda \int_0^b H(s,t)\,\mu(t)\,dt = h(s).$$

Die Gleichung

$$(66)\quad \psi(x) - \lambda \int_0^l K(y,x)\,\psi(y)\,dy = g(x)$$

transformiert sich auf

$$(67)\quad \nu(s) - \lambda \int_0^b H(t,s)\,\nu(t)\,dt = \varrho(s),$$

falls wir noch

$$\nu(s) = \psi(\xi(s))\,\xi'(s),\ \varrho(s) = \xi'(s)\ g(\xi(s))$$

setzen.

Infolge der Rechnungen auf S. 10 u. 11 sind die durch

$$H(s,t) = N(s,t) + p(s,t)$$

definierten Funktionen $p(s,t)$ und $\frac{\partial p(s,t)}{\partial s}$ beschränkt. Ferner ist $p(s,t)$ für $t \neq s_1$ stetig. Auf der Geraden $t = s_1$ nimmt sie zu beiden Seiten stetige Randwerte an. $\frac{\partial p(s,t)}{\partial s}$ verhält sich stetig ausser auf den Geraden $t = s_1, s = s_1$, auf deren beiden Seiten jedoch bestimmte stetige Randwerte existieren (ausser in (s_1, s_1)). Wir führen nun die Funktion $P(s,t/\lambda)$ mittelst der Gl.

$$(68) \qquad P(s,t/\lambda) - \lambda \int_0^b N(s,\tau)\, P(\tau,t/\lambda)\, d\tau = p(s,t)$$

ein. Aus den Auflösungsformeln (22) lässt sich leicht schliessen, dass $P(s,t/\lambda)$ dieselben Stetigkeitseigenschaften wie $p(s,t)$ besitzt, wenn λ in S liegt. Um das Verhalten von $\frac{\partial P(s,t/\lambda)}{\partial s}$ zu erkennen, betrachten wir folgenden Ausdruck

$$I = \frac{ch\,u - \cos\vartheta_j}{a} \frac{d}{du} \int_{-\infty}^{+\infty} E(u-\varkappa, \theta/\lambda)\, p_i(\varkappa,t)\, d\varkappa.$$

Durch Differentiation und partielle Integration folgt:

$$I = \frac{ch\,u - \cos\vartheta_j}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} E(u-\varkappa,\theta/\lambda) \frac{(-1)^i a}{ch\,\varkappa - \cos\vartheta_i} \left[\frac{\partial p(s,t)}{\partial s}\right]_{\varkappa,\vartheta_i} d\varkappa.$$

Für λ in S gibt es eine Zahl $\eta\,(0<\eta<1)$, dass

$$|E(\sigma,\theta/\lambda)| < C_1\, e^{-\eta|\sigma|}.$$

Ferner haben wir

$$\left|\frac{\partial p(s,t)}{\partial s}\right| < C_2.$$

Also gilt für $u > 0$

$$|I| < C_3\, e^{u}\Big[\int_{-\infty}^{0}\frac{e^{-\eta(u-\varkappa)}}{e^{-\varkappa}}\,d\varkappa+\int_{0}^{u}\frac{e^{-\eta(u-\varkappa)}}{e^{\varkappa}}\,d\varkappa+$$

$$+\int_{u}^{\infty}\frac{e^{-\eta(\varkappa-u)}}{e^{\varkappa}}\,d\varkappa\Big] < c_4\, e^{(1-\eta)u}$$

$C_1, C_2 \cdots$ sind Konstanten.[1] Es gilt also, wenn λ dem Gebiete S angehört, eine Ungleichung

$$\left|\frac{\partial P(s,t/\lambda)}{\partial s}\right| < C_0\,|s-s_1|^{-\beta} \quad (\beta<1) \tag{69}$$

und zwar gleichmässig in t.

Wegen der Beschränktheit von $\frac{\partial p(s,t)}{\partial s}$ können wir Formel (43) anwenden und erhalten so in der Nähe eines Punktes λ_1 ($I[\lambda_1]=0, \lambda_1\theta>\pi$)

$$P(s,t/\lambda) = r(t,\lambda)\,e^{isq(\lambda)u}+Q(s,t/\lambda), \tag{70}$$

wo $r(t,\lambda)$ und $Q(s,t/\lambda)$ für $|\lambda-\lambda_1|<r_0$ holomorphe, auf der reellen Achse reelle Funktionen sind. Ferner hat $Q(s,t/\lambda)$ dieselben Stetigkeitseigenschaften wie $p(s,t)$. $r(t,\lambda)$ ist in bezug auf t stückweise stetig. Insbesondere gibt es eine solche Konstante k_1, dass

$$|r(t,\lambda)|<k_1\ |Q(s,t/\lambda)|<k_1 \quad (|\lambda-\lambda_1|<r_0) \tag{70'}$$

Um aus (42) das Verhalten von $\frac{\partial Q}{\partial s}$ zu ersehen, müssen wir noch den Ausdruck

[1] Wenn $\eta>1$ gewählt werden kann, ist

$$I=(-1)^i\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{ch\,u-\cos\vartheta_j}{ch(u+\varkappa)-\cos\vartheta_i}E(\varkappa,\theta/\lambda)\left(\frac{\partial p(s,t)}{\partial s}\right)_{u+\varkappa,\vartheta_i}d\varkappa$$

gleichmässig konvergent, und wir erhalten

$$\lim_{u=\infty} I=\left(\frac{\partial p}{\partial s}\right)_{u=\infty,\vartheta_i}(-1)^i\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{E(\varkappa,\theta/\lambda)}{e^{\varkappa}}\,d\varkappa.$$

$$J = \frac{ch\,u - \cos\vartheta_j}{a}\frac{d}{du}\int_u^\infty \sin q(\varkappa - u)[p_i(\varkappa,t) - p_i(\infty,t)]\,d\varkappa =$$

$$= \frac{ch\,u - \cos\vartheta_j}{a}\int_0^\infty \sin q\varkappa \frac{\partial p_i(u+\varkappa,t)}{\partial u}\,d\varkappa =$$

$$= \frac{ch\,u - \cos\vartheta_j}{a}\int_0^\infty \sin q\varkappa \frac{(-1)^i a}{ch(u+\varkappa) - \cos\vartheta_i}\left(\frac{\partial p}{\partial s}\right)_{u+\varkappa} d\varkappa$$

untersuchen. Wenn $|I[q(\lambda)]| < \gamma_1 < 1$, wird dieses Integral gleichmässig konvergent, und wir erhalten

$$\lim_{u=\infty} J = (-1)^i \left(\frac{\partial p}{\partial s}\right)_{u=\infty} \cdot \int_0^\infty e^{-\varkappa} \sin q\varkappa\, d\varkappa.$$

Die in der Formel für $\frac{\partial Q}{\partial s}$ auftretenden Funktionen

$$\frac{d}{ds} H_{p_i}(u, \theta/-\lambda) \text{ und } \frac{d}{ds} H^*_{p_i}(u, \theta/\lambda)$$

haben, da es eine Grösse $\eta > 1$ gibt, mit welcher

$$|E(u,\theta/\lambda)| < e^{-\eta|u|},\ |E^*(u,\theta/\lambda)| < e^{-\eta|u|},$$

laut der Fussnote *S.* 90 bestimmte Grenzwerte für $u = \infty$. $\frac{\partial Q(s,t/\lambda)}{\partial s}$ hat also in einer gewissen Umgebung von λ_1 dieselben Stetigkeitseigenschaften wie $\frac{\partial p(s,t)}{\partial s}$.

Wenn λ in der Nähe von $\frac{\pi}{\theta}$ variiert, ist $P(s,t/\lambda)$ eine eindeutige Funktion von q, die, wie aus (42) folgt, in $q = 0$ einen Pol mit dem prinzipalen Teil

$$\frac{6}{\pi^2 - \theta^2}\frac{iu\,p(s_1,t)}{q} = \frac{im(t)\,\Xi(s)}{q}$$

besitzt. Wir können also schreiben

$$(71) \qquad P(s,t/\lambda) = \frac{im(t)\,\Xi(s)}{q(\lambda)} + P_1(s,t/\lambda),$$

wo $P_1(s,t/\lambda)$ als reguläre Potenzreihe von $q(\lambda)$ oder $\sqrt{\lambda - \frac{\pi}{\theta}}$ geschrieben werden kann. Ferner ist es möglich, wie klein η_0 auch sei, zwei positive Zahlen k_2 und r_1 zu finden, dass

$$(72) \qquad |P_1(s,t/\lambda)| < k_2 |s-s_1|^{-\eta_0} \quad \left(\left|\lambda - \frac{\pi}{\theta}\right| < r_1\right)$$

$P(s,t/\lambda)$ lässt sich in der Nähe von $\lambda = -\frac{\pi}{\theta}$ als reguläre Potenzreihe von $q(-\lambda)$ darstellen. Ferner genügt $P(s,t/\lambda)$ dort einer zu (72) analogen Ungleichung.

Da bei den folgenden Untersuchungen der zu $P(s,t/\lambda)$ gehörige Fredholmsche Nenner $D_P(\lambda)$ eine fundamentale Rolle spielen wird, soll er hier etwas näher untersucht werden. Es gilt

$$D_P(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(\lambda),$$

wo

$$A_n(\lambda) = \frac{(-\lambda)^n}{\underline{n}} \int\int \cdots \int \begin{vmatrix} P(t_1,t_1/\lambda) \cdots P(t_1,t_n/\lambda) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ P(t_n,t_1/\lambda) \cdots P(t_n,t_n/\lambda) \end{vmatrix} dt_1 \cdots dt_n$$

gesetzt ist. Man sieht unmittelbar, dass $D_P(\lambda)$ sich in S regulär verhält. Sei r_3 eine solche Zahl, dass

$$|I[q(\lambda)]| < \beta < 1 \quad (|\lambda - \lambda_1| < r_3)$$

Da also $|e^{iq(\lambda)u}| < k_3 |s-s_1|^{-\beta}$ folgt aus (70) unter Berücksichtigung von (70)$'$

$$|P(s,t/\lambda)| < k_4 |s-s_1|^{-\beta} \quad (|\lambda - \lambda_1| < r_3).$$

Hieraus schliesst man, dass $A_n(\lambda)$ für $|\lambda - \lambda_1| < r_3$ holomorph ist, und ferner, bei Anwendung eines Determinantensatzes von Hadamard, dass in demselben Gebiet die Ungl.

$$|A_n(\lambda)| < \frac{(|\lambda_1| + r_3)^n}{\underline{n}} k_4^n \left[\int_0^b |t - s_1|^{-\beta} dt \right]^n \cdot n^n = B_n$$

besteht.

Da ΣB_n konvergiert, ist $D_P(\lambda)$ im Bereiche $|\lambda - \lambda_1| < r_3$ regulär und kann somit über L hinaus analytisch fortgesetzt werden. Dasselbe können wir bezüglich L' (den zu L in bezug auf den Nullpunkt symmetrischen Teil der reellen Achse) aussagen.

Um das Verhalten von $D_P(\lambda)$ bei $\lambda = \frac{\pi}{\theta}$ zu erkennen, benutzen wir folgende Formel für den zu einer Summe von zwei Kernen $(G(s,t) + H(s,t))$ gehörigen FREDHOLMschen Nenner[1]:

$$D_{G+H}(\lambda) = D_G(\lambda) \cdot D_H(\lambda) - \frac{\lambda^2}{1^2} \int\int D_G\left(\begin{matrix} s \\ t \end{matrix} \Big/ \lambda\right) D_H\left(\begin{matrix} t \\ s \end{matrix} \Big/ \lambda\right) ds\, dt +$$

(73)

$$+ \frac{\lambda^4}{(\underline{2},^2} \int\int\int\int D_G\left(\begin{matrix} s_1, s_2 \\ t_1, t_2 \end{matrix} \Big/ \lambda\right) D_H\left(\begin{matrix} t_1, t_2 \\ s_1, s_2 \end{matrix} \Big/ \lambda\right) dt_1\, dt_2\, ds_1\, ds_2 - \cdots .$$

Falls wir hier

$$G = \frac{i m(t)\, \Xi(s)}{q}, \quad H = P_1(s, t/\lambda)$$

setzen ergibt sich, da

$$D_G(\lambda) = 1 - \frac{\lambda i}{q} \int_0^b m(s)\, \Xi(s)\, ds$$

$$D_G\left(\begin{matrix} s \\ t \end{matrix} \Big/ \lambda\right) = \frac{i m(t)\, \Xi(s)}{q}$$

$$D_G\left(\begin{matrix} s_1, s_2 \cdots s_n \\ t_1, t_2 \cdots t_n \end{matrix} \Big/ \lambda\right) = 0 \quad (n > 1),$$

[1] Diese Formel wird hier zwecks Raumersparnis ohne Beweis angeführt. Dass sie in dem Falle, wo $G = A(s).B(t)$ gültig ist, zeigt man am einfachsten durch Aufsuchen der Lösbarkeitsbedingung der Gl. $\varphi(s) - -\lambda \int H(s,t)\varphi(t)dt = \lambda A(s) \int \varphi(t) B(t) dt$.

dass für $\left|\lambda - \frac{\pi^2}{\theta}\right| < r_1$ die Entwicklung

$$D_P(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{\lambda - \frac{\pi}{\theta}}} P\left(\sqrt{\lambda - \frac{\pi^2}{\theta}}\right) \tag{74}$$

gilt, wo $P\left(\sqrt{\lambda - \frac{\pi^2}{\theta}}\right)$ eine nach positiven Potenzen von $\sqrt{\lambda - \frac{\pi^2}{\theta}}$ fortschreitende Potenzreihe bedeutet. $D_H(\lambda)$ und $D_H\left(\begin{matrix} s \\ t \end{matrix} \middle/ \lambda\right)$ sind nämlich als Funktionen von q betrachtet wegen (72) in $q = 0$ regulär.

$D_P(\lambda)$ kann nicht identisch verschwinden, da $D_P(0) = 1$. Wir bezeichnen die Nullstellen von $D_P(\lambda)$ im Innern und auf der Begrenzung $(L + L')$ von S mit $\lambda_1, \lambda_2 \cdots \lambda_n \cdots$. Da $D_P(\lambda)$ im betrachteten Bereiche entweder regulär oder von der Form (74) ist, besitzt die Zahlenfolge $\lambda_1, \lambda_2 \cdots \lambda_n \cdots$ im Endlichen keine Häufungsstelle.

Wir wollen nun die Lösbarkeit der Gl. (63), (66) und der zugehörigen homogenen Gleichungen

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^b K(x, y)\varphi(y)dy = 0 \tag{75}$$

$$\psi(x) - \lambda \int_0^b K(y, x)\psi(y)dy = 0 \tag{76}$$

behandeln. Man findet analog wie auf S. 19 und 21, dass (63) und (66) mit den Systemen

$$\begin{cases} \chi(s) - \lambda \int_0^b N(s, t)\chi(t)dt = h(s) \\ \mu(s) - \lambda \int_0^b P(s, t/\lambda)\mu(t)dt = \chi(s) \end{cases} \tag{77}$$

bzw.

$$(78)\qquad \begin{cases} \theta(s) - \lambda \int_0^b P(t, s/\lambda)\theta(t)dt = \varrho(s) \\ \nu(s) - \lambda \int_0^b N(t, s)\nu(t)dt = \theta(s) \end{cases}$$

gleichbedeutend sind. Hierbei sind gewisse Vertauschungen in der Integrationsfolge vorgenommen, deren Zulässigkeit unmittelbar klar ist, wenn es sich um absolut integrierbare Lösungen handelt. Da wir aber auch nicht absolut integrierbare Funktionen $\nu(s)$ in Betracht ziehen, müssen wir um die Äquivalenz von (66) und (78) zu erkennen, noch beweisen, dass im Doppelintegral

$$\int_0^b \int_0^b N(s, \tau)\nu(s)P(\tau, t/\lambda)ds\,dt$$

die Integrationsfolge beliebig gewählt werden kann.

$P(\tau, t/\lambda)$ genügt wegen (69) in bezug auf τ einer Hölderschen Bedingung im Punkte s_1. Betrachten also das Doppelintegral

$$I = \int_0^b \int_0^b N(s, t)\nu(s)k(t)ds\,dt,$$

wo $\nu(s)$ integrierbar ist, und $\omega(s)$ einer Ungleichung

$$(79)\qquad |k(s) - k(s_1)| < c\,|s - s_1|^\beta \quad (\beta > 0)$$

genügt. Wir schreiben

$$I = I_1 + I_2$$

$$I_1 = \int_0^b \int_0^b N(s, t)\nu(s)(k(t) - k(s_1))ds\,dt$$

$$I_2 = \int_0^b \int_0^b N(s, t)\nu(s)k(s_1)ds\,dt$$

und zeigen, dass die Integrationsfolge in sowohl I_1 als I_2 vertauscht werden kann. Durch Einführung der Bezeichnungen

$$\int_0^b N(s,t)\,(k(t)-k(s_1))\,dt = P(s)$$

$$\int_0^b N(s,t)\,\nu(s)\,ds = Q(t), \quad \int_0^s \nu(t)\,dt = \omega(s)$$

folgt

$$\int_0^b \nu(s)\,P(s)\,ds = -\int_0^b \omega(s)\,P'(s)\,ds =$$

$$= -\int_0^b\int_0^b \omega(s)\,N'_s(s,t)\,(k(t)-k(s_1))\,dt\,ds.$$

Der ausintegrierte Teil verschwindet nämlich wegen der Gl.

$$N(0,s) = N(b,s) = 0.$$

Zufolge (79) und den weiteren Ungl.

$$|N'_s(s,t)| < \frac{C_0}{|t-s_1|^2+|s-s_1|^2}$$

$$|\omega(s)| < C_1$$

konvergiert letztgenanntes Doppelintegral absolut. Wir können also zuerst in bezug auf s integrieren und erhalten so durch partielle Integration

$$\int_0^b \nu(s)\,P(s)\,ds = \int_0^b Q(t)\,(k(t)-k(s_1))\,dt$$

w. z. b. w.

Berechnen wir I_2 durch Integration zuerst in bezug auf s, so ergibt sich

$$I_2 = -k(s_1)\int_0^b\left[\int_0^b\left(\frac{dG(s,t)}{ds}-\frac{dG(s,2b-t)}{ds}\right)\omega(s)\,ds\right]dt =$$

$$= -k(s_1)\int_0^b\left[\int_0^b\frac{d[G(t,s)+G(2b-t,s)]}{dt}\omega(s)\,ds\right]dt =$$

$$= -2k(s_1)\int_0^b[G(b,s)-G(0,s)]\omega(s)\,ds.$$

Denselben Ausdruck erhält man auch, wenn man erst bezüglich t integriert und darauf eine partielle Integration ausführt. Es ist also gleichgültig, in welcher Reihenfolge die Integrationen in I vollzogen werden.

Nach diesen Vorbereitungen gehen wir über zur Diskussion der Gl. (63), (66), (75), (76) für verschiedene Werte des Parameters λ, und unterscheiden dabei mehrere Fälle.[1]

I. λ in S und verschieden von λ_i.

Aus (77) folgt unmittelbar, dass (63) für jedes begrenzte $f(x)$ durch eine Funktion $\varphi(x)$ derselben Beschaffenheit eindeutig lösbar ist. Ferner: zu stetigem $f(x)$ gehören stetige Funktionen $\varphi(x)$.

$(78)_1$ lässt sich durch die Formel

$$\theta(s) = \varrho(s) + \lambda\int_0^b \Gamma(t,s/\lambda)\,\varrho(t)\,dt \tag{80}$$

auflösen, wo

$$\Gamma(s,t/\lambda) = \frac{D_P\left(\begin{matrix}s\\t\end{matrix}/\lambda\right)}{D_P(\lambda)} \tag{81}$$

gesetzt wird. Dies gilt zunächst nur für absolut integrierbare $\varrho(s)$. Da aber, wie sich leicht aus der Fredholmschen Reihe (oder aus den Resolventengleichungen) ersehen lässt, $\Gamma(s,t/\lambda)$ und $\frac{\partial\Gamma(s,t/\lambda)}{\partial s}$ die vorher für $P(s,t/\lambda)$ bzw.

[1] Über die Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ machen wir die Annahme, dass sie für $x \neq x_1$ stetig sind.

$\frac{\partial P(s,t\ \lambda)}{\partial s}$ angeführten Stetigkeitseigenschaften besitzen, so hat (80) auch für integrierbare (nicht notwendig absolut integrierbare) Funktionen $\varrho(s)$ eine Bedeutung. Durch Einführung der Bezeichung $\int_0^s \varrho(s)\,ds = \omega(s)$ schreibt sich (80)

$$(82)\quad \theta(s) = \varrho(s) + \lambda\omega(b)\,\Gamma(b, s/\lambda) - \lambda\int_0^b \Gamma'_t(t, s/\lambda)\,\omega(t)\,dt.$$

Durch Grenzübergang (unter Anwendung einer analog wie $f^{(l)}(s)$ auf S. 67 definierten Funktion $\varrho^{(l)}(s)$) zeigt man, dass dieser Ausdruck $(78)_1$ erfüllt. (82) stellt eine in S analytische Funktion dar. Durch Anwendung von (70) können wir eine Resolventengleichung für $\Gamma(s,t/\lambda)$ in der Nähe eines von den λ_i verschiedenen inneren Punktes λ' auf L $(q(\lambda) > 0)$ so schreiben

$$\Gamma(s,t/\lambda) = e^{iq(\lambda)u}\left[r(t,\lambda) + \lambda\int_0^b r(\tau,\lambda)\,\Gamma(\tau,t/\lambda)\,d\tau\right] +$$

$$+ Q(s,t/\lambda) + \lambda\int_0^b Q(s,\tau/\lambda)\,\Gamma(\tau,t/\lambda)\,d\tau.$$

Unter Benutzung der Tatsache, dass $\Gamma(s,t/\lambda)$ beschränkt ist, folgern wir hieraus, dass $\Gamma(s,t/\lambda)$ die Form

$$(83)\qquad \Gamma(s,t/\lambda) = e^{iq(\lambda)u}\,R(t,\lambda) + \Gamma_1(s,t/\lambda)$$

hat, wo sich $R(t,\lambda)$ und $\Gamma_1(s,t/\lambda)$ bezüglich Stetigkeit und Differentiierbarkeit analog wie $r(t,\lambda)$ bzw. $Q(s,t/\lambda)$ verhalten. Man sieht nun leicht, dass $\theta(s)$, $\nu(s)$ und damit auch $\psi(x)$ bei einer Annäherung an λ' (längs der Kurve $q(\lambda) =$ Konstante) bestimmten Grenzwerten zustreben, falls

$$(84)\qquad \int_0^l g(x)\,e^{iq(\lambda)u}\,dx$$

konvergiert. Ein solcher Grenzwert stellt eine Lösung von (66) für $\lambda = \lambda'$ dar, falls

$$\int_0^b U(s, \lambda')\,\theta(s)\,ds = 0. \tag{85}$$

Wir fassen das Hauptresultat bezüglich Gl. (66) wie folgt zusammen: (66) lässt sich für jede integrierbare Funktion $g(x)$ durch eine ebensolche in S regulär analytische $(\lambda \neq \lambda_i)$ Funktion $\psi(x)$ eindeutig auflösen.

Die Gl. (75) besitzt, wie schon bemerkt, keine beschränkte Lösung. Dagegen kann man nicht beschränkte Funktionen, z. B. für λ in Γ_1'

$$V(s, \lambda) + \lambda \int_0^b \Gamma(s, t/\lambda)\, V(t, \lambda)\, dt$$

angeben, die der zu (63) gehörigen homogenen Gl. genügen. Falls wir $\lambda = -1$ setzen, ergibt sich eine Funktion $\varphi^*(x)$ von solcher Beschaffenheit, dass

$$W(p) = \int_C \frac{d \log \frac{1}{r_{py}}}{dn_y}\, \varphi^*(y)\, dy$$

eine überall auf C ausser in x_1 verschwindende harmonische Funktion darstellt. $W(p)$ kann natürlich nicht beschränkt sein.

II. λ in S und gleich λ_i.

Alle begrenzten bzw. absolut integrierbaren Lösungen von (75) und (76) ergeben sich aus den Gleichungen

$$\mu(s) - \lambda_i \int_0^b P(s, t/\lambda_i)\, \mu(t)\, dt = 0 \tag{86}$$

und

$$(87)\quad \begin{cases} \theta(s) - \lambda_i \int_0^b P(t, s/\lambda_i)\,\theta(t)\,dt = 0 \\ \nu(s) - \lambda_i \int_0^b N(t, s)\,\nu(t)\,dt = \theta(s). \end{cases}$$

Seien die vollständigen Systeme von linear unabhängigen Lösungen der Gl. (86) und $(87)_1$ $\mu_1, \mu_2 \cdots \mu_n$, $\theta_1, \theta_2 \cdots \theta_n$. Zu diesen Funktionen gehören Lösungen $\varphi_1, \varphi_2 \cdots \varphi_n$ bzw. $\psi_1, \psi_2 \cdots \psi_n$ von (75) und (76). Die Funktionen $\varphi_i(x)$ sind stetig. Aus Formel $(28)'$ findet man (analog wie beim Herleiten von (69)) unter Berücksichtigung der Beschränktheit von $\theta_r(s)$ die Ungl.

$$|\psi_r(x)| < C\,|x - x_1|^{\mu-1} \quad (\mu > 0)$$

(C = Konstante). Die S. 26 erwähnte Plemeljsche Beweisführung ist also im vorliegende Falle anwendbar, und man erhält, dass alle λ_i reell sind. Die Lösbarkeit der Gl. (63) und (66) unterliegt den Bedingungen

$$\int_0^b \chi(s)\,\theta_r(s)\,ds = 0 \quad (r = 1, 2 \cdots n)$$

bzw.

$$\int_0^b \varrho(s)\,\mu_r(s)\,ds = 0 \quad (r = 1, 2 \cdots n),$$

welche Gleichungen sich leicht auf

$$\int_0^b f(x)\,\psi_r(x)\,dx = 0$$

und

$$\int_0^b g(x)\,\varphi_r(x)\,dx = 0$$

transformieren lassen.

III. λ **reell,** $|\lambda\theta| > \pi$, $\lambda \neq \lambda_i$.

Sei zunächst $\lambda\theta > \pi$. Alle absolut integrierbaren Lösungen von (75) ergeben sich aus der Gleichung

$$\mu(s) - \lambda \int_0^b P(s, t/\lambda)\, \mu(t)\, dt = c\, U(s, \lambda), \tag{88}$$

wo c eine beliebige Konstante bedeutet. Mit $P(s, t/\lambda)$ verstehen wir hier den Wert, welchen die vorher in S definierte Funktion $P(s, t/\lambda)$ annimmt, wenn λ sich dem betreffenden reellen Punkt von derjenigen Seite nähert, wo $I[q(\lambda)] > 0$ ist. Gemäss (70) können wir (88) für $c = 1$ schreiben

$$\mu(s) - \lambda \int_0^b [e^{iq(\lambda)u} r(t, \lambda) + Q(s, t/\lambda)]\, \mu(t)\, dt = U(s, \lambda). \tag{89}$$

Da $D_P(\lambda) \neq 0$, besitzt diese Gl. eine und nur eine Lösung:

$$\mu(s) = \alpha_1(\lambda) \cos q(\lambda) u + \beta_1(\lambda) \sin q(\lambda) u + \mu_0(s, \lambda) \tag{90}$$

$\mu_0(s, \lambda)$ bedeutet die Grösse

$$\lambda \int_0^b Q(s, t/\lambda)\, \mu(t)\, dt.$$

Es folgt aus den Stetigkeitseigenschaften von $Q(s, t/\lambda)$ und $\frac{\partial Q(s, t/\lambda)}{\partial s}$, dass $\mu_0(s, \lambda)$ eine stetige Funktion in s ist, welche für $s \neq s_1$ eine beschränkte Ableitung besitzt. $\alpha_1(\lambda)$ und $\beta_1(\lambda)$ können nicht gleichzeitig verschwinden. Da $R[\mu(s)]$ und $I[\mu(s)]$ auch Lösungen der zu (65) gehörigen homogenen Gl. sind, so gibt es zwei Konstanten c_1 und c_2 (welche nicht beide Null sind), dass

$$R[\mu(s)] = c_1 \mu(s), \; I[\mu(s)] = c_2 \mu(s).$$

Wir können also (90) mit einem solchen von Null verschiedenen konstanten Faktor c' multiplizieren, dass $c' \mu(s)$ reell wird. Die Grössen $c' \alpha_1(\lambda)$ und $c' \beta_1(\lambda)$ müssen auch reell ausfallen, weil die Relation

$$I[c'\alpha_1(\lambda)]\cos q(\lambda)u + I[c'\beta_1(\lambda)]\sin q(\lambda)u + I[c'\mu_0(s,\lambda)] = 0$$

wegen der Stetigkeit von $I[c'\mu_0(s,\lambda)]$ in $s = s_1$ die Gl.

$$I[c'\alpha_1(\lambda)] = I[c'\beta_1(\lambda)] = I[c'\mu_0(s,\lambda)] = 0$$

zur Folge hat. Hieraus folgt leicht, dass

$$\frac{\mu(s)}{\sqrt{\alpha_1(\lambda)^2 + \beta_1(\lambda)^2}}$$

eine reelle Lösung darstellt. Es ergibt sich somit, dass (75) eine Lösung von der Form

$$(91)\quad \Phi(x,\lambda) = \alpha(\lambda)\cos q(\lambda)u + \beta(\lambda)\sin q(\lambda)u + \Phi_0(x,\lambda)$$

$$(\alpha(\lambda)^2 + \beta(\lambda)^2 = 1)$$

besitzt, wo $\Phi_0(x,\lambda)$ in $x = x_1$ stetig ist, und $\alpha(\lambda), \beta(\lambda), \Phi_0(x,\lambda)$ ausserdem reelle analytische Funktionen von λ sind. $\frac{d\Phi_0}{dx}$ existiert für $x \neq x_1$ und ist eine beschränkte Funktion. Es gibt keine von $\Phi(x,\lambda)$ linear unabhängige Lösung zu (75).

Für $\lambda\theta < -\pi, I[\lambda] = 0$ erhält man eine analoge Lösung:

$$(92)\quad \Phi(x,\lambda) = (-1)^j[\alpha(\lambda)\cos q(-\lambda)u + \beta(\lambda)\sin q(-\lambda)u] + \\ + \Phi_0(x,\lambda) \qquad (x \infty s \infty (u, \vartheta_j)).$$

Wir können nun für $\lambda' \neq \lambda_i$ die Bedingung (85) auf folgende Weise transformieren: Es gilt

$$(93)\quad \theta(s) - \lambda' r(s,\lambda')\int_0^b e^{iq(\lambda)x}\theta(t)\,dt - \lambda'\int_0^b Q(t,s/\lambda)\theta(t)\,dt = \varrho(s).$$

Falls wir (89) (für $\lambda = \lambda'$) mit $\theta(s)$ und (93) mit $\mu(s)$ multiplizieren, ergibt sich nach Integration, da die Integrationsfolge im Doppelintegral

$$\int_0^b\int_0^b Q(t,s/\lambda)\theta(t)\mu(s)\,dt\,ds$$

vertauscht werden kann,

$$\int_0^b \theta(s)\, U(s,\lambda')\, ds = \int_0^b \varrho(s)\, \mu(s)\, ds = \int_0^l g(x)\, \Phi(x,\lambda)\, dx.$$

Die Relation (85) können wir also mit

$$\int_0^b g(x)\, \Phi(x,\lambda')\, dx = 0 \tag{94}$$

ersetzen. Wenn diese Gl. erfüllt ist, und ausserdem das Integral (84) konvergiert, so sind diejenigen Grenzwerte einander gleich, welchen die im Falle I besprochene Lösung $\psi(x)$ zustrebt, wenn λ sich dem Punkte λ' längs der Kurve $q(\lambda) = q(\lambda')$ von der einen bzw. anderen Seite nähert. Zum Beweise bemerken wir, dass die Differenz dieser Grenzwerte (welche nach I integrierbare Funktionen sind) eine integrierbare Lösung von (76) für $\lambda = \lambda'$ darstellt, und zeigen, dass eine solche Lösung identisch verschwinden muss. Sei also $\psi(x)$ eine integrierbare Lösung von (76). Mit der Bezeichnung $\omega(x) = \int_0^x \psi(x)\, dx$ und unter Berücksichtigung der Gl. $K'_x(x,y) = K'_y(y,x)$ folgt durch partielle Integration

$$\psi(x) - \lambda\left[\omega(l)\, K(l,x) - \int_0^l K'_x(x,y)\, \omega(y)\, dy\right] = 0. \tag{95}$$

Da $\int_0^l K(x,y)\, \omega(y)\, dy$ auf C stetig ist, so ergibt sich bei Integration von 0 bis l

$$\omega(l)(1-\lambda) = (1-\lambda)\int_0^l \psi(x)\, dx = 0.$$

(95) schreibt sich also

$$\psi(x) + \lambda \int_0^l K'_x(x, y)\, \omega(y)\, dy = 0.$$

Hieraus folgt

$$\omega(x) + \lambda \int_0^l K(x, y)\, \omega(y)\, dy = \lambda \int_0^l K(0, y)\, \omega(y)\, dy = k.$$

Es würde also die Gl.

$$\varphi(x) + \lambda \int_0^l K(x, y)\, \varphi(y)\, dy = 0$$

die stetige Lösung $\omega(x) - \frac{k}{1+\lambda}$ haben, was aber für $\lambda = \lambda' \neq \lambda_i$ unmöglich ist.

Bei Anwendung von (39) sieht man, dass (63) für begrenzte Funktionen $f(x)$ immer lösbar ist (nicht eindeutig), und ferner, dass die Lösung sicher beschränkt ist, falls

$$\int_0^l \left| \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \right| dx$$

konvergiert.

Es ergibt sich aus (78) unter Heranziehen von (49), dass (66) sicher eine absolut integrierbare Lösung besitzt, falls

$$\int_0^l \log \left| \frac{1}{x - x_1} \right| g(x)\, dx$$

absolut konvergiert, und die mit Gl. $\int_0^l \theta(s)\, U(s, \lambda)\, ds = 0$ äquivalente Relation

$$\int_0^l g(x)\, \Phi(x, \lambda)\, dx = 0$$

erfüllt ist. (76) hat keine absolut integrierbare Lösung.

Die Sätze sind völlig analog für $\lambda\theta < -\pi$.

IV. λ **reell,** $|\lambda\theta| > \pi, \lambda = \lambda_i$.

Wir betrachten hier nur den Fall $\lambda\theta > \pi$, weil $\lambda\theta < -\pi$ sich völlig analog behandeln lässt.

Jede Lösung der Gl.

$$\mu(s) - \lambda_i \int_0^b H(s,t)\,\mu(t)\,dt = 0 \tag{96}$$

ist eine lineare Kombination mit konstanten Koeffizienten von den Lösungen der Gleichungen

$$\mu(s) - \lambda_i \int_0^b \left[e^{iq(\lambda)u}\, r(t,\lambda_i) + Q(s,t/\lambda_i) \right] \mu(t)\,dt = 0 \tag{97}$$

$$\mu(s) - \lambda_i \int_0^b \left[e^{iq(\lambda)u}\, r(t,\lambda_i) + Q(s,t/\lambda_i) \right] \mu(t)\,dt = U(s,\lambda_i) \tag{98}$$

und umgekehrt. Wir betrachten zugleich das mit (76) äquivalente System

$$\begin{cases} \theta(s) - \lambda_i \int_0^b P(t,s/\lambda_i)\,\theta(t)\,dt = 0 \\ \nu(s) - \lambda_i \int_0^b N(t,s)\,\nu(t)\,dt = \theta(s) \end{cases} \tag{99}$$

(97) hat eine endliche Anzahl linear unabhängiger Lösungen $\mu_1(s), \mu_2(s) \cdots \mu_n(s)$. Falls alle die Bedingungen

$$\int_0^b \theta_r(s)\,U(s,\lambda_i)\,ds = 0 \quad (r = 1, 2 \cdots n) \tag{100}$$

gelten, wo $\theta_1(s)$, $\theta_2(s) \cdots \theta_n(s)$ die n linear unabhängigen Lösungen von $(99)_1$ sind, so liefert (98) noch eine Lösung

$\mu_{n+1}(s)$ der Gl. (96), die sicher von $\mu_1(s), \mu_2(s) \cdots \mu_n(s)$ linear unabhängig ist.

Sei $\mu(s)$ eine stetige Lösung von (96). Es gibt solche Konstanten c_r, dass

$$\mu(s) = \sum_{r=1}^{n} c_r \mu_r(s) + c_{n+1} \mu_{n+1}(s).$$

Da das oszillierende Glied in $\mu_{n+1}(s)$ nicht durch die oszillierenden Glieder $(c\, e^{iq(\lambda)u})$ in $\mu_1(s), \mu_2(s) \cdots \mu_n(s)$ gehoben werden kann, so muss $c_{n+1} = 0$ sein. Hieraus folgt, dass $\mu(s)$ der Gl. (97) genügt, und wegen der Stetigkeit von $\mu(s)$ müssen wir

$$\int_0^b r(t, \lambda_i)\, \mu(t)\, dt = 0$$

haben. Es ergibt sich somit, dass jede stetige, (96) genügende Funktion die Gl.

$$\mu(s) - \lambda_i \int_0^b Q(s, t/\lambda_i)\, \mu(t)\, dt$$

erfüllt.

Aus (99) erhalten wir

$$\nu(s) - \lambda_i \int_0^b N(t, s)\, \nu(t)\, dt = \sum_{r=1}^{n} c_r \theta_r(s).$$

Für die Existenz einer absolut integrierbaren Lösung dieser Gleichung ist notwendig und hinreichend, dass

$$\sum_{r=1}^{n} c_r \int_0^b U(s, \lambda_i)\, \theta_r(s)\, ds = 0.$$

Hieraus folgt, dass (76) n oder $n-1$ absolut integrierbare[1] Lösungen besitzt, je nachdem (100) erfüllt ist oder nicht.

[1] Es ergibt sich leicht wegen der Beschränktheit von $\theta_r(s)$ aus (49), dass diese Lösungen begrenzte Funktionen sind.

Wir wollen zeigen, dass sämtliche Relationen (100) gelten müssen. Zu diesem Zwecke gehen wir von der Voraussetzung aus, dass diese Bedingungen nicht sämtlich erfüllt sind. Dann wird (98) unlösbar. Da wir in diesem Falle die Funktionen $\mu_1(s), \mu_2(s) \cdots \mu_n(s)$ reell annehmen können, erhält man durch Vergleich der imaginären Teile der beiden Seiten in (97)

$$\int_0^b r(t, \lambda_i)\, \mu_r(t)\, dt = 0.$$

Also haben wir

$$\mu_r(s) - \lambda_i \int_0^b Q(s, t/\lambda_i)\, \mu_r(t)\, dt = 0;$$

$\mu_r(s)$ ist somit stetig. Da $\frac{\partial Q}{\partial s}$ beschränkt ist, so sind die Ableitungen (welche sicher für $x \neq x_1$ existieren) der zu $\mu_1(s), \mu_2(s) \cdots \mu_n(s)$ gehörigen Lösungen von (75) $\varphi_1(x), \varphi_2(x) \cdots \varphi_n(x)$ begrenzte Funktionen. Aus der Relation $K'_x(x, y) = K'_y(y, x)$ ergibt sich leicht

$$\varphi'_r(x) + \lambda_i \int_0^b K(y, x)\, \varphi'_r(y)\, dy = 0.$$

Die Funktionen $\varphi'_r(x)$ sind linear unabhängig. Denn wenn wir die im entgegengesetzten Falle gültige Relation

$$\gamma_1 \varphi_1(x) + \gamma_2 \varphi_2(x) + \cdots \gamma_n \varphi_n(x) = \gamma_{n+1}$$

($\gamma_1\ \gamma_2\ \gamma_{n+1}$ Konstanten) mit der Leiter-Belegung $r_i(x)\left(\int_0^l r_i(x)dx = 1\right)$ auf C, welche zu $\varphi_r(x)$ orthogonal ist, multiplizieren und dann integrieren, so ergibt sich $\gamma_{n+1} = 0$, was der linearen Unabhängigkeit von $\varphi_1, \varphi_2 \cdots \varphi_n$ widerspricht. Da $K(x, y)$ mit dem definiten[1] Kern $\log \frac{R_0}{r_{xy}}$ symmetrisierbar

[1] Vergl. S. 157.

ist (PLEMELJ Jabl. Ges. § 13), so sind die Funktionen

$$\varphi_r^*(x) = \int_C \log \frac{R_0}{r_{xy}} \varphi'_r(y)\, dy$$

linear unabhängige stetige Lösungen der Gl.

$$\varphi(x) + \lambda_i \int_0^l K(x, y)\, \varphi(y)\, dy = 0.$$

Die zu $\varphi_r^*(x)$ gehörigen Funktionen $\mu_r^*(s)$ sind auch stetig und müssen daher der Gl.

$$\mu^*(s) + \lambda_i \int_0^b Q(s, t / -\lambda_i)\, \mu^*(t)\, dt = 0$$

genügen. Hieraus entnehmen wir wie oben, dass $\frac{d\varphi_r^*(x)}{dx}$ $(r = 1, 2 \ldots n)$ begrenzte Funktionen sind und n linear unabhängige Lösungen von (76) darstellen. Dies erfordert aber, dass die Relationen (100) gelten, und damit ist also unsere Behauptung bewiesen.

Es lässt sich somit für jedes $\theta_r(s)$ aus der Gl.

$$\nu_r(s) - \lambda_i \int_0^b N(t, s)\, \nu_r(t)\, dt = \theta_r(s) \tag{101}$$

eine Funktion $\nu_r(s)$ finden. Jedem $\nu_r(s)$ entspricht eine Lösung $\psi_r(x)$ von (76). Wir können uns das System $\theta_1(s), \theta_2(s) \cdots \theta_n(s)$ so gewählt denken, dass die eingehenden Funktionen reell und von solcher Beschaffenheit sind, dass die zugehörigen $\psi_r(x)$ den Relationen

$$\int_0^l \int_0^l \log \frac{R_0}{r_{xy}}\, \psi_p(x)\, \psi_q(y)\, dx\, dy = \begin{cases} 0 & (p \neq q) \\ 1 & (p = q) \end{cases} \tag{102}$$

genügen. Die Funktionen

$$\varphi_r(x) = \int_0^l \log \frac{R_0}{r_{xy}} \psi_r(y)\, dy$$

sind Lösungen der Gl. (75). Wegen der Stetigkeit von $\varphi_r(x)$ folgt wie oben

$$\varphi_r(x) = \sum_{k=1}^{n} \beta_{rk} \mu_k(s),$$

wo β_{rk} Konstanten sind. Die lineare Unabhängigkeit von $\varphi_1(x), \varphi_2(x) \cdots \varphi_n(x)$ ergibt, dass die Determinante $|\beta_{pq}|$ nicht verschwinden kann. Hieraus folgt leicht, dass $\mu_r(s)$ in $s = s_1$ stetig sind. Man kann das System $\mu_1(s), \mu_2(s) \cdots \mu_n(s)$ derartig normiert annehmen, dass

$$\mu_r(s) = \varphi_r(x) \quad (r = 1, 2 \cdots n).$$

Wir wollen nun das Verhalten von $\Gamma(s, t/\lambda)$ in der Nähe von $\lambda = \lambda_i$ untersuchen. Da $D_P(\lambda)$ nicht identisch verschwindet, gilt in der Umgebung von $\lambda = \lambda_i$ eine Entwicklung

$$\Gamma(s, t/\lambda) = \frac{A_m(s,t)}{(\lambda - \lambda_i)^m} + \frac{A_{m-1}(s,t)}{(\lambda - \lambda_i)^{m-1}} + \cdots A_0(s,t) + \\ + (\lambda - \lambda_i) B(s, t/\lambda), \tag{103}$$

wo $B(s, t/\lambda)$ in λ_i regulär ist. Man sieht unmittelbar, dass $A_m(s,t)$ die Form

$$A_m(s,t) = \sum_{p,q}^{n} c_{pq} \mu_p(s) \theta_q(t) \tag{104}$$

haben muss. Die Funktion

$$\mu(s) = \chi(s) + \lambda \int_0^b \Gamma(s, t/\lambda) \chi(t)\, dt$$

genügt der Gl.

$$\mu(s) - \lambda \int_0^b H(s,t) \mu(t)\, dt = \chi(s) - \lambda \int_0^b N(s,t) \chi(t)\, dt \tag{105}$$

Nehmen nun an, dass $m > 1$ sei. Da die Koeffizienten von $\frac{1}{(\lambda - \lambda_i)^m}$ und $\frac{1}{(\lambda - \lambda_i)^{m-1}}$ auf der linken Seite von (105) verschwinden müssen, folgen, unter Berücksichtigung dass $\chi(s)$ beliebig gewählt werden kann, die Gleichungen

$$A_m(s,t) - \lambda_i \int_0^b H(s,\tau)\, A_m(\tau,t)\, d\tau = 0.$$

(106)

$$A_{m-1}(s,t) - \lambda_i \int_0^b H(s,\tau)\, A_{m-1}(\tau,t)\, d\tau - \frac{A_m(s,t)}{\lambda_i} = 0$$

Falls wir $(106)_2$ mit $\nu_r(s)$ multiplizieren und darauf integrieren, ergibt sich

$$\int_0^b A_m(s,\tau)\, \nu_r(s)\, ds = 0 \quad (r = 1, 2 \cdots n) \tag{107}$$

Nach (102) haben wir

$$\int_0^b \nu_p(s)\, \mu_q(s)\, ds = \begin{matrix} 0 & (p \neq q) \\ 1 & (p = q) \end{matrix}$$

Also erhält man aus (107) unter Benutzung von (104)

$$\sum_{r=1}^{n} c_{rq}\, \theta_q(t) = 0 \quad (r = 1, 2 \cdots n).$$

Wegen der linearen Unabhängigkeit von $\theta_1(s), \theta_2(s) \cdots \theta_n(s)$ ist $c_{pq} = 0$ $(p, q = 1, 2 \cdots n)$ und somit $A_m(s,t) = 0$. m kann also nicht grösser als Eins sein. Um das Residuum von $\Gamma(s,t/\lambda)$ zu finden vergleichen wir noch die konstanten Glieder auf beiden Seiten in (105). Man erhält:

$$A_0(s,t) - \lambda \int_0^b H(s,\tau)\, A_0(\tau,t)\, d\tau - \frac{A_1(s,t)}{\lambda_i} =$$

$$= H(s,t) - N(s,t) = p(s,t).$$

Durch Multiplizieren mit $\nu_r(s)$ und Integrieren finden wir

$$\frac{1}{\lambda_i}\sum_{q=1}^{n} c_{rq}\,\theta_q(t) = \int_0^b H(s,t)\,\nu_r(s)\,ds - \int_0^b N(s,t)\,\nu_r(s)\,ds = \frac{\theta_r(t)}{\lambda_i}.$$

Wir erhalten somit schliesslich

$$A_1(s,t) = -\sum_{r=1}^{n} \mu_r(s)\,\theta_r(t).$$

$\Gamma(s,t/\lambda)$ lässt sich also in der Umgebung von $\lambda = \lambda_i$ schreiben

$$\Gamma(s,t/\lambda) = \frac{\sum_{r=1}^{n} \mu_r(s)\,\theta_r(t)}{\lambda_i - \lambda} + \text{reg. Funktion.} \tag{108}$$

Aus dieser Formel folgt unter Berücksichtigung der Gleichungen (100), dass die Lösung von (89) in λ_i regulär ist. Hieraus schliessen wir, dass sich $\Phi(x,\lambda)$ für alle Punkte auf L und $L'\left(\neq \pm \frac{\pi}{\theta}\right)$ regulär verhält und eine begrenzte in $x = x_1$ oszillierende Lösung von (75) darstellt.

Wir können die allgemeinen Lösungen von (75) bzw. (76) wie folgt schreiben

$$\varphi(x) = c_0\,\Phi(x,\lambda_i) + \sum_{r=1}^{n} c_r\,\varphi_r(x)$$

$$\psi(x) = \sum_{r=1}^{n} c_r\,\psi_r(x);$$

$c_0\,c_1 \cdots c_n$ sind beliebige Konstanten.

Es ergibt sich ohne Schwierigkeiten aus den Systemen (77), (78), dass (63) und (66) lösbar sind, wenn die Gl.

$$\int_0^l \psi_r(x)\,f(x)\,dx = 0$$

bzw.

$$\int_0^l \varphi_r(x) g(x)\, dx = 0, \qquad \int_0^l \Phi(x, \lambda_i) g(x)\, dx = 0$$

statthaben.

V. $\lambda = \pm \frac{\pi}{\theta}$.

Wir führen die Funktionen $P^+(s,t)$ und $P^-(s,t)$ durch die Gl.

$$P^+(s,t) - \frac{\pi}{\theta}\int_0^b N(s,\tau)\, P^+(\tau,t)\, d\tau = p(s,t) \tag{109}$$

$$P^-(s,t) + \frac{\pi}{\theta}\int_0^b N(s,\tau)\, P^-(\tau,t)\, d\tau = p(s,t) \tag{110}$$

ein. Machen wir in (51) die Annahme, dass $f(s)$ in s_1 stetig ist und dort eine Lipschitzsche Bedingung erfüllt, dass also

$$|f_i(u) - f_i(\infty)| < C_0\, e^{-u},$$

können wir das letzte Glied in diesen Formeln auf folgende Weise schreiben

$$-\frac{6}{\pi^2 - \theta^2}\int_0^u (u-\varkappa)\, F_1(\varkappa)\, d\varkappa = -\frac{3\,u^2\, F_1(\infty)}{\pi^2 - \theta^2} -$$

$$-\frac{6\,u}{\pi^2 - \theta^2}\int_0^\varkappa [F_1(\varkappa) - F_1(\infty)]\, d\varkappa +$$

$$+\frac{6\,u}{\pi^2 - \theta^2}\int_u^\varkappa [F_1(\varkappa) - F_1(\infty)]\, d\varkappa +$$

$$+\frac{6}{\pi^2 - \theta^2}\int_0^u \varkappa\, [F_1(\varkappa) - F_3(\infty)]\, d\varkappa$$

Durch Addieren von

$$\frac{6\,\Xi(s)}{\pi^2-\theta^2}\int_0^{\infty}[F_1(x)-F_1(\infty)]\,dx$$

zu (51) ergibt sich die Lösung

$$\mu_j(u)=f_j(u)+\frac{1}{\theta}\left[H^*_{F_1}\left(u,\theta/\frac{\pi}{\theta}\right)+(-1)^j H_{F_2}\left(u,\theta/-\frac{\pi}{\theta}\right)\right]+$$

$$+\frac{6\,u}{\pi^2-\theta^2}\int_u^{\infty}[F_1(x)-F_1(\infty)]\,dx+$$

$$\frac{6}{\pi^2-\theta^2}\int_0^{u}x[F_1(x)-F_1(\infty)]\,dx-\frac{3\,u^2}{\pi^2-\theta^2}F_1(\infty).$$

Wir wenden diese Auflösungsformel zur Bestimmung von $P^+(s,t)$ aus (109) an. Es folgt, dass $P^+(s,t)$ die Form

$$(111)\qquad P^+(s,t)=r^+(t)\,u^2+Q^+(s,t)=r^+(t)\,(\Xi(s))^2+Q^+(s,t)$$

erhält, wo $r^+(t)$ und $Q^+(s,t)$ in bezug auf Stetigkeit sich analog wie $r(t,\lambda)$ bzw. $p(s,t)$ verhalten. Es gilt auch die Ungl.

$$(112)\qquad \left|\frac{\partial\,Q^+(s,t)}{\partial\,s}\right|<C_1\log\frac{R_0}{|s-s_1|}.$$

Wir transformieren (55) auf analoge Weise und erhalten so unter Berücksichtigung der Gl. $F_2(\infty)=0$ für $P^-(s,t)$ die Formel

$$(113)\qquad P^-(s,t)=\frac{s_1-s}{|s-s_1|}r^-(t)+Q^-(s,t)$$

$r^-(t)$ und $Q^-(s,t)$ verhalten sich ähnlich wie $r^+(t)$ und $Q^+(s,t)$.

Alle Lösungen von

$$(114)\qquad \mu(s)-\frac{\pi}{\theta}\int_0^{b}H(s,t)\,\mu(t)\,dt=0$$

sind lineare Kombinationen von den Lösungen der Gl.

$$\mu(s) - \frac{\pi}{\theta}\int_0^b [u^2 r^+(t) + Q^+(s,t)]\,\mu(t)\,dt = 0 \tag{115}$$

$$\mu(s) - \frac{\pi}{\theta}\int_0^b [u^2 r^+(t) + Q^+(s,t)]\,\mu(t)\,dt = \Xi(s) \tag{116}$$

(115) möge die n linear unabhängigen Lösungen $\mu_1(s), \mu_2(s) \cdots \mu_n(s)$ haben. Wir können offenbar dies System so wählen, dass $\mu_1(s), \mu_2(s) \cdots \mu_{n-1}(s)$ stetig ausfallen. Seien ferner $\theta_1(s), \theta_2(s) \cdots \theta_n(s)$ die n linear unabhängigen Lösungen von

$$\theta(s) - \frac{\pi}{\theta}\int_0^b P^+(t,s)\,\theta(t)\,dt = 0.$$

Diese Funktionen können so gewählt werden, dass

$$\int_0^b \theta_r(s)\,\Xi(s)\,ds = 0 \quad (r = 1, 2 \cdots n-1). \tag{117}$$

(76) hat n oder $n-1$ linear unabhängige Lösungen, je nachdem

$$\int_0^b \theta_n(s)\,\Xi(s)\,ds = 0 \tag{118}$$

erfüllt ist oder nicht. Im ersten Falle liefert (116) eine von $\mu_1(s), \mu_2(s) \cdots \mu_n(s)$ linear unabhängige Lösung $\mu_{n+1}(s)$, die in s_1 nicht stetig sein kann. Da $\int_C \log \frac{R_0}{r_{xy}}\,\psi_r(y)\,dy$, wo $\psi_r(y)$ eine Lösung von (76) ist, der Gl. (75) genügt, so hat diese Gl. mindestens n linear verschiedene stetige Lösungen. Wir schliessen hieraus wie im Falle IV, dass $\mu_n(s)$ stetig sein muss.

Ist dagegen $\int_0^b \theta_n(s)\,\Xi(s)\,ds \neq 0$, so kann $\mu_n(s)$ nicht stetig sein, weil wir dann wie im Falle IV n Lösungen von (76) herleiten könnten.

Es gilt also in beiden Fällen folgendes: Die Gl. (75) besitzt eine Lösung $\Phi^+(x)$ von der Form

$$\Phi^+(x) = \mu^+(s) = \alpha^+(\Xi(s))^2 + \beta^+\,\Xi(s) + \mu_0^+(s) \tag{119}$$

$$((\alpha^+)^2 + (\beta^+)^2 \neq 0)$$

worin $\mu_0^+(s)$ in $s = s_1$ stetig ist.

Ausser dieser Lösung kann eine endliche Anzahl linear unabhängiger stetiger Lösungen $\varphi_1(x), \varphi_2(x) \cdots \varphi_m(x)$ existieren. In diesem Falle gibt es auch m linear verschiedene, (76) genügende Funktionen $\psi_1(x) \cdots \psi_m(x)$. Die allgemeinen Lösungen von (75) und (76) können wir mit den willkürlichen Konstanten $c_0, c_1 \cdots c_r$ schreiben

$$\varphi(x) = c_0\,\Phi^+(x) + \sum_{r=1}^{m} c_r\,\varphi_r(x)$$

$$\psi(x) = \sum_{r=1}^{m} c_r\,\psi_r(x) \quad (m \geq 0)$$

Ein völlig analoges Resultat erhalten wir für $\lambda = -\frac{\pi i}{\theta}$, nur dass an die Stelle von (119) eine Funktion

$$\mu^-(s) = \frac{s_1 - s}{|s - s_1|}(\alpha^-\,\Xi(s) + \beta^-) + \mu_0^-(s) \tag{120}$$

tritt.

Wir gehen nun zur Behandlung der Gleichung (63) über. Betrachten also das System

$$\left\{\begin{aligned} &\chi(s) - \frac{\pi}{\theta}\int_0^b N(s,t)\,\chi(t)\,dt = h(s) \\ &\mu(s) - \frac{\pi}{\theta}\int_0^b P^+(s,t)\,\mu(t)\,dt = \chi(s). \end{aligned}\right. \tag{121}$$

Aus $(121)_1$ erhalten wir

$$\chi(s) = \chi_0(s) + c\,\Xi(s),$$

worin c eine willkürliche Konstante bedeutet. Untersuchen zuerst den Fall $\int_0^b \theta_n(s)\,\Xi(s)\,ds = 0$. $(121)_2$ wird dann und nur dann lösbar, wenn

$$\int_0^b (\chi_0(s) + c\,\Xi(s))\,\theta_r(s)\,ds = \int_0^b \chi_0(s)\,\theta_r(s)\,ds = 0 \quad (r = 1, 2 \cdots n)$$

Man sieht aus den Integralgleichungen für $\chi_0(s)$ und $\nu_r(s)$, dass diese Relationen mit

$$\int_0^l f(x)\,\psi_r(x)\,dx = 0 \quad (r = 1, 2 \cdots m) \tag{122}$$

gleichbedeutend sind.

Nehmen jetzt $\int_0^b \theta_n(s)\,\Xi(s)\,ds \neq 0$ an. Wir erhalten die Lösbarkeitsbedingungen

$$\int_0^b \chi_0(s)\,\theta_r(s)\,ds = 0 \quad (r = 1, 2 \cdots n-1) \tag{123}$$

$$\int_0^b \chi_0(s)\,\theta_n(s)\,ds + c\int_0^b \Xi(s)\,\theta_n(s)\,ds = 0. \tag{124}$$

Aus (124) wird die Konstante c bestimmt. Man erhält analog wie vorher, dass die Gl. (123) mit (122) äquivalent sind.

Hieraus das Resultat: (63) ist stets lösbar, falls die Bedingungen

$$\int_0^l f(x)\,\psi_r(x)\,dx = 0 \quad (r = 1, 2 \cdots m)$$

befriedigt sind.

Das zu (66) gehörige System

$$(125)\qquad \begin{cases} \theta(s) - \dfrac{\pi}{\theta}\displaystyle\int_0^b P^+(t,s)\,\theta(t)\,dt = \varrho(s) \\ \nu(s) - \dfrac{\pi}{\theta}\displaystyle\int_0^b N(t,s)\,\nu(t)\,dt = \theta(s) \end{cases}$$

wird in dem Fall, wo (118) erfüllt ist, dann und nur dann lösbar, wenn

$$\int_0^b \varrho(s)\,\mu_r(s)\,ds = 0 \quad (r = 1, 2 \cdots n)$$

$$\int_0^b \Xi(s)\,[\theta_0(s) + \Sigma c_r \theta_r(s)]\,ds = \int_0^b \Xi(s)\,\theta_0(s)\,ds = 0.$$

Diese Relationen lassen sich auch in der Form

$$(126)\qquad \int_0^l \Phi^+(x)\,g(x)\,dx = 0 \quad \int_0^l \varphi_r(x)\,g(x)\,dx = 0 \quad (r = 1, 2 \cdots m)$$

darstellen.

Im Falle $\int_0^b \theta_n(s)\,\Xi(s)\,ds \neq 0$ erhalten wir für die Lösbarkeit von $(125)_1$ die Bedingungen

$$\int_0^b \varrho(s)\,\mu_r(s)\,ds = 0 \quad r = 1, 2 \cdots n-1$$

$$\int_0^b \varrho(s)\,\mu^+(s)\,ds = 0.$$

Sind diese erfüllt, so hat $(125)_1$ eine Lösung

$$\theta(s) = \theta_0(s) + \sum_{r=1}^{n} c_r \theta_r(s).$$

$(125)_2$ wird lösbar, falls

$$\int_0^b \Xi(s)\left[\theta_0(s) + \sum_{r=1}^{n} c_r \theta_r(s)\right] ds =$$

$$= \int_0^b \Xi(s)\,\theta_0(s)\,ds + c_n \int_0^b \theta_n(s)\,\Xi(s)\,ds = 0.$$

Wir können offenbar c_n so bestimmen, dass diese Gl. befriedigt wird. Man erhält also auch in diesem Falle die Bedingungen (126).

Es hat sich somit ergeben: Für die Lösbarkeit von (66) für $\lambda = \frac{\pi}{\theta}$ ist notwendig und hinreichend, dass die Relationen

$$\int_0^l \Phi^+(x)\,g(x)\,dx = 0$$

$$\int_0^l \varphi_r(x)\,g(x)\,dx = 0 \quad (r = 1, 2 \cdots m)$$

erfüllt sind (Wir setzen die Existenz von

$$\int_0^l \left| g(x)\left(\log\frac{1}{|x - x_1|}\right)^2 \right| dx \text{ voraus}).$$

Analoges gilt für $\lambda = -\frac{\pi}{\theta}$.

Wir geben noch einige von den Hauptresultaten dieses Paragraphen (namentlich bezüglich der homogenen Gleichungen) in Zusammenfassung wieder:

Es gibt eine reelle, sich nirgends im Endlichen häufende Zahlenfolge $\lambda_1, \lambda_2 \cdots \lambda_n \cdots$ von solcher Beschaffenheit, dass die Gl.

(126) $$\varphi(x) - \lambda \int_C \frac{\cos(r_{yx} n_y)}{\pi r_{xy}} \varphi(y)\,dy = 0$$

$$(127) \qquad \psi(x) - \lambda \int_C \frac{\cos(n_x r_{xy})}{\pi r_{xy}} \psi(y)\, dy = 0$$

dann und nur dann eine stetige bzw. absolut integrierbare (integrierbare) Lösung besitzen, wenn λ dieser Zahlenfolge angehört. Die Anzahl der linear unabhängigen zu demselben λ_i gehörigen Lösungen von diesen Gleichungen ist endlich und für beide Gl. dieselbe.

Zu jedem reellen, der Bedingung $\lambda\theta > \pi$ oder $\lambda\theta < -\pi$ genügenden λ-Wert gehören Lösungen von (126), die sich in der Umgebung von $x = x_1$ in der Gestalt

$$\varphi(x) = a(\lambda) \cos\left[q(\lambda) \log \frac{1}{|x - x_1|}\right] + b(\lambda) \sin\left[q(\lambda) \log \frac{1}{|x - x_1|}\right] + \varphi_0(x, \lambda)$$

bzw.

$$\varphi(x) = \frac{x_1 - x}{|x - x_1|}\left[a(\lambda) \cos\left(q(-\lambda) \log \frac{1}{|x - x_1|}\right) + b(\lambda) \sin\left(q(-\lambda) \log \frac{1}{|x - x_1|}\right)\right] + \varphi_0(x, \lambda)$$

$$(a(\lambda)^2 + b(\lambda)^2 \neq 0)$$

darstellen lassen, worin $a(\lambda)$, $b(\lambda)$, $\varphi_0(x, \lambda)$ analytische Funktionen von λ sind, und $\varphi_0(x, \lambda)$ ausserdem in $x = x_1$ stetig ist.

Für $\lambda = \frac{\pi}{\theta}$ und $\lambda = -\frac{\pi}{\theta}$ existieren Lösungen von der Form

$$\varphi(x) = a^+ \log^2 \frac{1}{|x - x_1|} + b^+ \log \frac{1}{|x - x_1|} + \varphi^+(x)$$

$$\varphi(x) = \frac{x_1 - x}{|x - x_1|}\left[a^- \log \frac{1}{|x - x_1|} + b^-\right] + \varphi^-(x)$$

$$((a^+)^2 + (b^+)^2 \neq 0,\ (a^-)^2 + (b^-)^2 \neq 0),$$

wo $\varphi^+(x)$ und $\varphi^-(x)$ in $x = x_1$ stetig sind.

Es ist immer möglich, wenn λ von den λ_i verschieden ist, Lösungen der zu (126) gehörigen inhomogenen Integralgleichung zu finden.

Wenn λ von λ_i und $L+L'$ verschieden ist, hat die Gl. (63) für jedes begrenzte $f(x)$ eine Lösung $\varphi(x)$ derselben Beschaffenheit. Es folgt leicht aus einer Bemerkung auf S. 67, dass diese λ-Werte durch die ebengenannte Eigenschaft völlig charakterisiert sind.

Die Lösung $\varphi(x)$ der Gl. (63) ist für begrenzte $f(x)$ in S $(\lambda \neq \lambda_i)$ holomorph. Falls $f(x)$ in x_1 einer HÖLDERschen Bedingung

$$|f(x)-f(x_1)|<h|x-x_1|^\beta \quad (\beta>0)$$

genügt, kann diese Funktion über L und L' hinaus analytisch fortgesetzt werden. In diesem Falle ist $\varphi(x)$ in der Umgebung von $\frac{\pi i}{\theta}$ und $-\frac{\pi i}{\theta}$ eine Funktion rationalen Charakters von $\sqrt{\lambda-\frac{\pi}{\theta}}$ bzw. $\sqrt{\lambda+\frac{\pi}{\theta}}$.

§ 10.

Differentiallösungen.

Wir sagen, dass eine in λ und x für $x \neq x_1$ stetige Funktion $A(x,\lambda)$ eine Differentiallösung von (75) ist, wenn die Gleichungen

$$\Delta A(x,\lambda) - \int_0^l K(x,y)\,\Delta B(y,\lambda)\,dy = 0 \tag{128}$$

$$\Delta B(x,\lambda) = \int_\lambda^{\lambda+\Delta\lambda} \mu\, d_\mu A(x,\mu) \tag{129}$$

erfüllt sind.[1] Das Differenzsymbol Δ bezieht sich auf die Variable λ in $A(x,\lambda)$ und $B(x,\lambda)$; es ist z. B. $\Delta A(x,\lambda) = A(x,\lambda+\Delta\lambda)-A(x,\lambda)$. Wenn es nötig ist, die Endpunkte λ', λ'' des Differenzintervalles hervorzuheben, schreiben wir

$$\Delta^{(\lambda',\lambda'')} A(x,\lambda) = A(x,\lambda'') - A(x,\lambda').$$

[1] Vgl. H. WEYL, Singuläre Integralgl. Math. Ann. Bd. 66.

Es ist leicht zu sehen, dass

$$A(x,\lambda) = \int_{\lambda_0}^{\lambda} \omega(\lambda)\,\Phi(x,\lambda)\,d\lambda \tag{130}$$

für jede im Sinne von LEBESGUE integrierbare Funktion $\omega(\lambda)$ eine Differentiallösung von (75) auf L und L' darstellt. Da für alle summierbaren Funktionen $f(q)$ die Gl.

$$\lim_{u=\infty} \int_{q_0}^{q_1} f(q)\cos q\,u\,dq = \lim_{u=\infty} \int_{q_0}^{q_1} f(q)\sin q\,u\,dq = 0$$

gelten, so ist die Funktion (130) auch in $x = x_1$ stetig.

Multiplizieren nun die Gl.

$$\Phi(x,\lambda) - \lambda \int_0^l K(x,y)\,\Phi(y,\lambda)\,dy = 0$$

mit dem Differential $d\sigma$ einer beliebigen stetigen Funktion $\sigma(\lambda)$ und integrieren. Da für ein Integrationsintervall innerhalb L oder L' die Ungl.

$$|\Phi'_\lambda(y,\lambda)| < C_1 \log \frac{C_2}{|y - x_1|} \quad (C_1 \cdot C_2 \cdot \cdot \text{bedeuten Konstanten}) \tag{131}$$

gilt, können wir in dem hier auftretenden Doppelintegral die Integrationsfolge vertauschen, und erhalten auf diese Weise, dass

$$A(x,\lambda) = \int_{\lambda_0}^{\lambda} \Phi(x,\lambda)\,d\sigma \tag{132}$$

eine Differentiallösung darstellt. Diese genügt der Ungl.

$$|A(x,\lambda)| < C_3 \log \frac{C_4}{|x - x_1|}.$$

Wir wollen nun zeigen, dass jede einer Bedingung

(133) $$|A(x,\lambda)| < C_5 |x - x_1|^{-\beta} \quad (\beta < 1)$$

genügende Differentiallösung von (75) auf $L + L'$ auf die Form (132) gebracht werden kann. Zu diesem Zwecke betrachten wir die Gl.

(134) $$\psi(x,\lambda) - \lambda \int_0^l K(y,x)\,\psi(y,\lambda)\,dy = g(x,\lambda),$$

wo $g(x,\lambda)$ durch

$$g(x,\lambda) = f(x) - \Omega(x,\lambda) \int_0^l \Omega(y,\lambda)\,f(y)\,dy$$

$$\Omega(x,\lambda) = \frac{\Phi(x,\lambda)}{\sqrt{\int_0^l \Phi(x,\lambda)^2\,dx}}$$

definiert ist. $f(x)$ bedeutet eine beliebige stetige Funktion. Sei (λ', λ'') ein innerhalb L oder L' gelegenes Intervall, das keinen von den Punkten λ_i enthalte. Wegen der Relation

$$\int_0^l g(x,\lambda)\,\Phi(x,\lambda)\,dx = 0$$

bestimmt (134) (nach § 9. III) eine Funktion $\psi(x,\lambda)$, die im Intervalle (λ', λ'') analytisch in bezug auf λ ist und einer Ungleichung

(135) $$|\psi(x,\lambda)| < C_6$$

genügt. Wir ersetzen nun in (134) λ mit $\lambda + \Delta\lambda$, multiplizieren mit $\Delta B(x,\lambda)$ und integrieren darauf in bezug auf x. Die Ungl. (133) und (135) zeigen, dass wir im Doppelintegral

$$\int_0^l \int_0^l K(y,x)\,\psi(y,\lambda)\,\Delta B(x,\lambda)\,dy\,dx$$

die Integrationsfolge vertauschen können. Es folgt also mit Hilfe von (128)

$$\int_0^l \psi(x, \lambda + \Delta\lambda)\, \Delta B(x, \lambda)\, dx -$$

$$- (\lambda + \Delta\lambda) \int_0^l \psi(x, \lambda + \Delta\lambda)\, \Delta A(x, \lambda)\, dx = \tag{136}$$

$$= \int_0^l g(x, \lambda + \Delta\lambda)\, \Delta B(x, \lambda)\, dx .$$

Die Gl. (129) kann auf folgende Weise geschrieben werden

$$\Delta B(x, \lambda) = (\lambda + \Delta\lambda)\, \Delta A(x, \lambda) - \int_\lambda^{\lambda + \Delta\lambda} \Delta^{(\lambda, \mu)} A(x, \mu)\, d\mu .$$

Durch Einsetzen dieses Wertes von ΔB in (136) ergibt sich

$$\int_0^l g(x, \lambda + \Delta\lambda)\, \Delta B(x, \lambda)\, dx = - \int_0^l dx \int_\lambda^{\lambda + \Delta\lambda} \psi(x, \lambda + \Delta\lambda)\, \Delta^{(\lambda, \mu)} A(x, \mu)\, d\mu .$$

Falls wir noch die Relation

$$\Delta \int_0^l dx \int_\lambda^\lambda g(x, \lambda)\, dB(x, \lambda) = \int_0^l g(x, \lambda + \Delta\lambda)\, \Delta B(x, \lambda)\, dx -$$

$$- \int_0^l dx \int_\lambda^{\lambda + \Delta\lambda} g'_\mu(x, \mu)\, \Delta^{(\lambda, \mu)} B(x, \mu)\, d\mu$$

berücksichtigen und die Funktionen

$$F_1(\lambda, \mu) = \int_0^l \psi(x, \lambda)\, A(x, \mu)\, dx$$

$$F_2(\lambda, \mu) = \int_0^l g'_\lambda(x, \lambda)\, B(x, \mu)\, dx$$

einführen, ergibt sich

$$\Delta \int_0^l dx \int_{\lambda'}^{\lambda} g(x,\lambda)\, dB(x,\lambda) = -\int_{\lambda}^{\lambda+\Delta\lambda} [F_1(\lambda+\Delta\lambda,\mu) - F_1(\lambda+\Delta\lambda,\lambda)]\, d\mu -$$

$$- \int_{\lambda}^{\lambda+\Delta\lambda} [F_2(\mu,\mu) - F_2(\mu,\lambda)]\, d\mu .$$

Da laut den Ungl. (133), (135) $F_1(\lambda,\mu)$ und $F_2(\lambda,\mu)$ im Gebiet $\lambda' \leq \frac{\lambda}{\mu} \leq \lambda''$ stetig sind, so folgt hieraus

$$\lim_{\Delta\lambda=0} \frac{\Delta \int_0^l dx \int_{\lambda'}^{\lambda} g(x,\lambda)\, dB(x,\lambda)}{\Delta\lambda} = 0 .$$

Somit gilt auch

$$\int_0^l dx \int_{\lambda'}^{\lambda} g(x,\lambda)\, dB(x,\lambda) = 0 . \tag{137}$$

Durch Benutzung des vorher angegebenen Wertes von $g(x,\lambda)$ erhält man aus dieser Relation

$$\int_0^l [B(x,\lambda) - B(x,\lambda')] f(x)\, dx =$$

$$= \int_0^l dx \int_{\lambda'}^{\lambda} \Omega(x,\lambda) \left[\int_0^l \Omega(y,\lambda) f(y)\, dy \right] dB(x,\lambda) =$$

$$= \int_0^l dx \int_0^l dy\, f(y) \int_{\lambda'}^{\lambda} \Omega(x,\lambda)\, \Omega(y,\lambda)\, dB(x,\lambda) = \tag{138}$$

$$= \int_0^l \left[\int_0^l dy \int_{\lambda'}^{\lambda} \Omega(x,\lambda)\, \Omega(y,\lambda)\, dB(y,\lambda) \right] f(x)\, dx .$$

Die Zulässigkeit der hier ausgeführten Vertauschungen in der Integrationsfolge beweist man leicht mittelst geeigneter partieller Integrationen. Da (138) für beliebige $f(x)$ gilt, so haben wir

$$B(x,\lambda) - B(x,\lambda') = \int_0^l dy \int_{\lambda'}^{\lambda} \Omega(x,\lambda)\,\Omega(y,\lambda)\,dB(y,\lambda).$$

Setzen wir nun

$$\sigma_0(\lambda) = \int_0^l dy \int_{\lambda'}^{\lambda} \Omega(y,\lambda)\,dB(y,\lambda),$$

so ergibt sich

$$B(x,\lambda) = B(x,\lambda') + \int_{\lambda'}^{\lambda} \Omega(x,\lambda)\,d\sigma_0(\lambda)$$

und hieraus folgt schliesslich

$$A(x,\lambda) - A(x,\lambda') = \int_{\lambda'}^{\lambda} \Phi(x,\lambda)\,d\sigma(\lambda),$$

wo $\sigma(\lambda)$ die stetige Funktion

$$\int_{\lambda'}^{\lambda} \frac{d\sigma_0(\lambda)}{\lambda \sqrt{\int_0^l \Phi(x,\lambda)^2\,dx}}$$

ist.

Wir beweisen noch, dass für $|\lambda| < \left|\frac{\pi}{\theta}\right|$ keine beschränkte, nicht konstante Differentiallösung existiert. Man kann genau wie im vorigen Falle verfahren, nur dass $g(x,\lambda)$ durch $f(x)$ ersetzt wird, und dass statt (133) und (135) die Ungl.

$$|\psi(x,\lambda)| < C_7 |x - x_1|^{\beta} \quad (\beta < 1)$$

$$|A(x,\lambda)| < C_8$$

auftreten. An Stelle von (137) erhalten wir

$$\int_0^l dx \int_{\lambda'}^{\lambda} f(x)\, dB(x,\lambda) = \int_0^l f(x)[B(x,\lambda) - B(x,\lambda')]\, dx = 0.$$

Da dies für alle $f(x)$ gilt, ergibt sich

$$B(x,\lambda) = B(x,\lambda'),$$

woraus unsere Behauptung unmittelbar folgt.

Wir gelangen auf folgende Weise zu einer Differentiallösung von (76). Um einen bestimmten Fall zu betrachten, nehmen wir $\lambda\theta > \pi$ an. Sei $\omega(q)$ eine zweimal stetig differentiierbare Funktion. Es gilt

$$(139)\quad \int_q^{q+\Delta q} \Phi(x,-\lambda)\omega(q)\,dq + \int_0^l K(x,y) \int_q^{q+\Delta q} \Phi(y,-\lambda)\,\omega(q)\,\lambda\,dq\,dy = 0$$

$$\left(\lambda = \frac{sh\,\pi q}{sh\,\theta q}\right).$$

Wir setzen

$$(140)\quad \begin{aligned} \Delta A^*(x,\lambda) &= \int_q^{q+\Delta q} \Phi'_x(x,-\lambda)\,\omega(q)\,dq \\ \Delta B^*(x,\lambda) &= \int_q^{q+\Delta q} \Phi'_x(x,-\lambda)\,\omega(q)\,\lambda\,dq. \end{aligned}$$

Bei Benutzung von (92) finden wir

$$\Delta A^*(x,\lambda) = \frac{ch\,u - \cos\vartheta_i}{a} \int_q^{q+\Delta q} [-\alpha(-\lambda)\sin qu +$$

$$+ \beta(-\lambda)\cos qu]\,q\,\omega(q)\,dq + \int_q^{q+\Delta q} \frac{d\,\Phi_0(x,-\lambda)}{dx}\,\omega(q)\,dq =$$

$$= \Delta A^*_1(x,\lambda) + \Delta A^*_0(x,\lambda).$$

ΔA^*_0 ist eine begrenzte Funktion. Durch partielle Integration ergibt sich für ΔA^*_1 die Darstellung

$$\Delta A^*_1(x,\lambda) =$$

$$(141)\quad = \frac{ch\,u - \cos\vartheta_i}{a}\,\Delta\frac{\alpha(-\lambda)\cos qu + \beta(-\lambda)\sin qu}{u}\,q\,\omega(q) +$$

$$+ \Delta A^*_3(x,\lambda) = \Delta A^*_2(x,\lambda) + \Delta A^*_3(x,\lambda),$$

wo ΔA^*_3 einer Ungleichung

$$(142)\qquad \left|\frac{a\,\Delta A^*_2}{ch\,u - \cos\vartheta_j}\right| < \frac{C_0}{u^2}\quad (C_0 = \text{Konstante})$$

genügt. Man sieht leicht aus (140) oder (141), dass ΔA^* und ΔB^* integrierbare Funktionen von x sind, ferner dass $\int_0^l f(x)\,\Delta A^*(x,\lambda)\,dx$, falls $f(x)$ in x_1 einer Hölderschen Bedingung genügt, gleichmässig konvergent ist (für jedes innerhalb L gelegene Intervall).

Differentiieren nun (139) in bezug auf x und ersetzen $K'_x(x,y)$ mit $K'_y(y,x)$. Dann erhalten wir nach partieller Integration unter Berücksichtigung, dass $\int_q^{q+1q}\lambda\Phi(x,-\lambda)\,\omega(q)\,dq$ auf C stetig ist,

$$\Delta A^*(x,\lambda) - \int_0^l K(y,x)\,\Delta B^*(y,\lambda)\,dy = 0.$$

Da ferner die Gl.

$$\Delta B^*(x,\lambda) = \int_\lambda^{\lambda+1\lambda}\mu\,d_\mu A^*(x,\mu)$$

gilt, so erkennen wir, dass $A^*(x,\lambda)$ eine Differentiallösung von (76) darstellt.

Betrachten nun zugleich die Differentiallösung von (75)

$$\Delta A(x,\lambda) = \int_{q}^{q+\Delta q} \omega_1(q)\,\Phi(x,\lambda)\,dq = \Delta A_1(x,\lambda) + \Delta A_0(x,\lambda),$$

wo

$$\Delta A_0(x,\lambda) = \int_{q}^{q+\Delta q} \omega_1(q)\,\Phi_0(x,\lambda)\,dq$$

$$\Delta A_1(x,\lambda) = \int_{q}^{q+\Delta q} \omega_1(q)\,(\alpha(\lambda)\cos qu + \beta(\lambda)\sin qu)\,dq$$

gesetzt ist. $\Delta A_0(x,\lambda)$ genügt gleichmässig in λ einer Lipschitzschen Bedingung in $x = x_1$. Ist $\omega_1(q)$ zweimal stetig differentiierbar, haben wir

$$\Delta A_1(x,\lambda) = \Delta \frac{\alpha(\lambda)\sin qu - \beta(\lambda)\cos qu}{u}\,\omega_1(q) -$$

$$(143)\qquad -\int_{q}^{q+\Delta q} \frac{\sin qu\cdot \dfrac{d(\omega_1(q)\alpha(\lambda))}{dq} - \cos qu\cdot \dfrac{d(\omega_1(q)\beta(\lambda))}{dq}}{u}\,dq =$$

$$= \Delta A_2(x,\lambda) + \Delta A_3(x,\lambda),$$

wo $\Delta A_3(x,\lambda)$ in der Nähe von $x = x_1$ eine Ungl.

$$|\Delta A_3(x,\lambda)| < \frac{C_1}{\log^2 \dfrac{1}{|x - x_1|}}$$

befriedigt.

Seien (λ_1, λ_2), (λ', λ'') zwei getrennt liegende Intervalle auf L. Mit den Bezeichnungen

$$C(x,\lambda,\mu) = \int_{\lambda'}^{\lambda}\int_{\lambda''}^{\mu} \Delta^{(s,t)} A^*(x,\lambda)\,dt\,ds,\quad D(x,\lambda,\mu) =$$

$$= \int_{\lambda'}^{\lambda}\int_{\lambda''}^{\mu} \Delta^{(s,t)} B^*(x,\lambda)\,dt\,ds$$

haben wir infolge der gleichmässigen Konvergenz in bezug auf s und t von $\int_0^l K(y,x)\,\Delta^{(s,t)} B^*(y,\lambda)\,dy$

$$C(x,\lambda,\mu) - \int_0^l K(y,x)\, D(y,\lambda,\mu)\, dy = 0 \tag{144}$$

Ferner gilt

$$\Delta^{(\lambda_1,\lambda_2)} A(x,\lambda) - \int_0^l K(x,y)\, \Delta^{(\lambda_1,\lambda_2)} B(y,\lambda)\, dy = 0. \tag{145}$$

Wir multiplizieren diese Gl. mit $D(x,\lambda,\mu)$ und integrieren in bezug auf x. Da wegen der Existenz von $\int_0^l |D(x,\lambda,\mu)|\, dx$ die Integrationsfolge in dem hierbei auftretenden Doppelintegral vertauscht werden kann, erhalten wir unter Berücksichtigung von (144)

$$\int_0^l D(x,\lambda,\mu)\, \Delta^{(\lambda_1,\lambda_2)} A(x,\lambda)\, dx - \int_0^l C(x,\lambda,\mu)\, \Delta^{(\lambda_1,\lambda_2)} B(x,\lambda)\, dx = 0.$$

Durch Differenzieren in bezug auf λ und μ ergibt sich nach Einsetzen der Parameterwerte $\lambda = \lambda'$, $\mu = \lambda''$

$$\int_0^l \Delta^{(\lambda',\lambda'')} B^*(x,\lambda)\, \Delta^{(\lambda_1,\lambda_2)} A(x,\lambda)\, dx - \int_0^l \Delta^{(\lambda',\lambda'')} A^*(x,\lambda)\, \Delta^{(\lambda_1,\lambda_2)} B(x,\lambda)\, dx = 0. \tag{146}$$

Die Zulässigkeit dieser Operation folgt aus der gleichmässigen Konvergenz der in (146) auftretenden Integrale. Berücksichtigen wir die Gl.

$$\Delta^{(\lambda',\lambda'')} B^*(x,\lambda) = \lambda''\, \Delta^{(\lambda',\lambda'')} A^*(x,\lambda) - \int_{\lambda'}^{\lambda''} \Delta^{(\lambda',\mu)} A^*(x,\mu)\, d\mu$$

$$\Delta^{(\lambda_1,\lambda_2)} B(x,\lambda) = \lambda_2\, \Delta^{(\lambda_1,\lambda_2)} A(x,\lambda) - \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \Delta^{(\lambda_1,\mu)} A(x,\mu)\, d\mu,$$

so ergibt sich aus (146)

$$(\lambda'' - \lambda_2) \int_0^l \Delta^{(\lambda', \lambda'')} A^* \Delta^{(\lambda_1, \lambda_2)} A \, dx -$$

$$(147) \qquad - \int_0^l \Delta^{(\lambda_1, \lambda_2)} A(x, \lambda) \int_{\lambda'}^{\lambda''} \Delta^{(\lambda', \mu)} A^*(x, \mu) \, d\mu \, dx +$$

$$+ \int_0^l \Delta^{(\lambda', \lambda'')} A^*(x, \lambda) \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \Delta^{(\lambda_1, \mu)} A(x, \mu) \, d\mu \, dx = 0.$$

Sei nun M das Maximum des absoluten Betrages der stetigen Funktion

$$Z(\lambda, \mu) = \int_0^l \Delta^{(\lambda_1, \lambda)} A \cdot \Delta^{(\lambda', \mu)} A^* dx$$

im Gebiete $\lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_2$, $\lambda' \leq \mu \leq \lambda''$, und zwar möge es für $\lambda = \lambda_0$, $\mu = \mu_0$ erreicht werden. Falls wir in (147) λ_2 und λ'' mit λ_0 bzw. μ_0 ersetzen, folgt

$$\pm M(\mu_0 - \lambda_0) = \int_{\lambda'}^{\mu_0} Z(\lambda_0, \mu) \, d\mu - \int_{\lambda_1}^{\lambda_0} Z(\mu, \mu_0) d\mu.$$

Hieraus ergibt sich leicht die Ungl.

$$(148) \qquad M |\mu_0 - \lambda_0| \leq (|\mu_0 - \lambda'| + |\lambda_0 - \lambda_1|) M.$$

Sei d der Abstand zwischen den Intervallen (λ', λ'') und (λ_1, λ_2), welche wir zur Abkürzung mit Δ_1 und Δ_2 bezeichnen wollen. Nehmen wir zunächst die Intervallgrössen kleiner als $\frac{d}{3}$ an, so folgt aus (148)

$$Md \leq \frac{2}{3} Md,$$

was für $M \neq 0$ unmöglich ist. Wir haben also die Gleichung

$$(149) \qquad \int_0^l \Delta_1 A^*(x,\lambda)\, \Delta_2 A(x,\lambda)\, dx = 0$$

für diesen Fall bewiesen. Ist obige Bedingung dagegen nicht erfüllt, so zerlegen wir die Intervalle Δ_1 und Δ_2 in Teilintervalle $\Delta_1^{(i)}, \Delta_2^{(i)}$, welche kleiner als $\frac{d}{3}$ sind. Die Gl.

$$\int_0^l \Delta_1 A^* \Delta_2 A\, dx = \sum_{p,q} \int_0^l \Delta_1^{(p)} A^* \Delta_2^{(q)} A\, dx$$

zeigt, dass (149) noch gültig bleibt, falls nur Δ_1 und Δ_2 keinen gemeinsamen Punkt haben. Aus der Stetigkeit von $Z(\lambda, \mu)$ folgt, dass wir in dieser Aussage für Δ_1 und Δ_2 einen gemeinsamen Endpunkt zulassen können. Wir können das durch (149) ausgedrückte Resultat auch formulieren

$$(150) \qquad \int_0^l \Delta_1 A^* \Delta_2 A\, dx = \int_0^l \Delta_{12} A^* \Delta_{12} A\, dx,$$

wo Δ_{12} das zu Δ_1 und Δ_2 gemeinsame Intervall bedeutet. (149) gilt auch wenn, Δ_1 oder Δ_2 L' angehört.

Die Gl. (150) gibt uns ein Mittel, die Funktion

$$\varrho(\lambda) = \int_0^l \Delta^{(\lambda', \lambda)} A^* \cdot \Delta^{(\lambda', \lambda)} A\, dx$$

zu berechnen. Zu diesem Zwecke suchen wir die Ableitung von $\varrho(\lambda)$. Es ist

$$\Delta \varrho(\lambda) = \int_0^l \Delta A^*(x,\lambda)\, \Delta A(x,\lambda)\, dx.$$

Man bestätigt unmittelbar, dass

$$\lim_{\Delta\lambda=0} \frac{1}{\Delta\lambda}\left[\int_0^{x_1-\delta_2} \Delta A\, \Delta A^*\, dx + \int_{x_1+\delta_1}^l \Delta A\, \Delta A^*\, dx\right] = 0,$$

wie klein die positiven Grössen δ_1 und δ_2 auch sein mögen. Wir haben also

$$\lim_{\Delta\lambda=0}\frac{\Delta\varrho(\lambda)}{\Delta\lambda}=$$

$$(151)\qquad =\lim_{\Delta\lambda=0}\frac{1}{\Delta\lambda}\int_{u_2}^{\infty}(\Delta A)_{x,\vartheta_2}\Delta\frac{\alpha(-\lambda)\cos qx+\beta(-\lambda)\sin qx}{x}\,q\,\omega(q)\,dx$$

$$+\lim_{\Delta\lambda=0}\frac{1}{\Delta\lambda}\int_{u_1}^{\infty}(\Delta A)_{x,\vartheta_1}\Delta\frac{\alpha(-\lambda)\cos qx+\beta(-\lambda)\sin qx}{x}\,q\,\omega(q)\,dx+J_0$$

wo

$$J_0=\lim_{\Delta\lambda=0}\int_{x_1-\delta_2}^{x_1+\delta_1}(\Delta A^*_0+\Delta A^*_3)\frac{\Delta A}{\Delta\lambda}\,dx$$

gesetzt ist. Die Ungleichungen

$$\left|\frac{\Delta A}{\Delta\lambda}\right|<C_2$$

$$|\Delta A^*_0+\Delta A^*_3|<\frac{C_3}{|x-x_1|\log^2\frac{1}{|x-x_1|}}$$

zeigen, dass der in J_0 auftretende Integrand dem absoluten Betrage nach unterhalb der absolut integrierbaren Funktion

$$\frac{C_2C_3}{|x-x_1|\log^2\frac{1}{|x-x_1|}}$$

liegt. Wir können somit den Grenzübergang unter dem Integralzeichen ausführen und erhalten wegen der Relation

$$\lim_{\Delta\lambda=0}\Delta(A^*_0+A^*_3)=0\quad(x\neq x_1)$$

$J_0=0$. Das erste Integral in (151) ist die Summe folgender Integrale:

$$= \int_{u_2}^{x} \Delta \frac{\alpha(-\lambda)\cos qx + \beta(-\lambda)\sin qx}{x} \omega(q) q \cdot \Delta \frac{\alpha(\lambda)\sin qx - \beta(\lambda)\cos qx}{x} \omega_1(q)\, dx$$

$$I_2 = \int_{u_2}^{\infty} (\Delta A_3)_{x,\vartheta_2} \Delta \frac{\alpha(-\lambda)\cos qx + \beta(-\lambda)\sin qx}{x} \omega(q)\, q\, dx$$

$$I_3 = \int_{u_2}^{x} (\Delta A_0)_{x,\vartheta_2} \Delta \frac{\alpha(-\lambda)\cos qx + \beta(-\lambda)\sin qx}{x} \omega(q)\, q\, dx.$$

Nach (143) können wir ΔA_3 in der Form

$$\Delta A_3 = \int_{q}^{q+\Delta q} \frac{F_1(q,x)}{x} dq$$

schreiben, wo $F_1(q,x)$ eine begrenzte Funktion ist. Das Integral

$$X(p,q) = \int_{u_2}^{x} \frac{F_1(q,x)\,(\alpha(-\lambda)\cos px + \beta(-\lambda)\sin px)}{x^2} \omega(p)\, p\, dx$$

ist eine stetige Funktion von p und q. Da I_2 sich in der Gestalt

$$I_2 = \int_{q}^{q+\Delta q} (X(q+\Delta q, p) - X(q,p))\, dp$$

darstellen lässt, folgt hieraus

$$\lim_{\Delta\lambda=0} \frac{I_2}{\Delta\lambda} = 0.$$

Auf analoge Weise erhält man

$$\lim_{\Delta\lambda=0} \frac{I_3}{\Delta\lambda} = 0.$$

Es bleibt uns also nur noch übrig

$$\lim_{\Delta\lambda=0}\frac{I_1}{\Delta\lambda}$$

zu bestimmen. Durch eine einfache Überlegung finden wir, dass dieser Grenzwert dem folgenden gleich sein muss

$$\lim_{\Delta\lambda=0}\int_{u_2}^{\infty}\frac{\omega(q)\,\omega_1(q)\,q}{\varkappa^2}[\alpha(-\lambda)\,\Delta\cos q\varkappa+\beta(-\lambda)\,\Delta\sin q\varkappa]\cdot$$

$$\cdot[\alpha(\lambda)\,\Delta\sin q\varkappa-\beta(\lambda)\,\Delta\cos q\varkappa]\,d\varkappa.$$

Wir haben also die Grenzwerte

$$J_1=\lim_{\Delta q=0}\frac{1}{\Delta q}\int_{u_2}^{\infty}\frac{(\Delta\cos q\varkappa)^2}{\varkappa^2}\,d\varkappa$$

$$J_2=\lim_{\Delta q=0}\frac{1}{\Delta q}\int_{u_2}^{\infty}\frac{(\Delta\sin q\varkappa)^2}{\varkappa^2}\,d\varkappa$$

$$J_3=\lim_{\Delta q=0}\frac{1}{\Delta q}\int_{u_2}^{\infty}\frac{\Delta\cos q\varkappa\,\Delta\sin q\varkappa}{\varkappa^2}\,d\varkappa$$

zu berechnen. Um den ersten von diesen zu evaluieren betrachten wir das Integral

$$\int_{u_2}^{\infty}\frac{\cos p\varkappa\cos q\varkappa}{\varkappa^2}\,d\varkappa=\frac{1}{2}\int_{u_2}^{\infty}\frac{\cos(p+q)\varkappa+\cos(p-q)\varkappa}{\varkappa^2}\,d\varkappa=$$

$$=\frac{1}{2}[F(p+q)+F(p-q)],$$

wo

$$F(x)=\int_{u_2}^{\infty}\frac{\cos x\varkappa}{\varkappa^2}\,d\varkappa=x\int_{u_2x}^{\infty}\frac{\cos\varkappa}{\varkappa^2}\,d\varkappa \tag{152}$$

gesetzt ist. Es folgt

$$J_1 = \frac{1}{2}\lim_{\Delta q=0}\frac{F(2q+2\Delta q)-2F(2q+\Delta q)+F(2q)}{\Delta q} +$$

$$+\frac{1}{2}\lim_{\Delta q=0}\frac{2[F(0)-F(\Delta q)]}{\Delta q}.$$

Da $F(q)$ für $q \neq 0$ regulär ist, so wird der erste Grenzwert Null. Also gilt

$$J_1 = -\lim_{\Delta q=0} F'(\Delta q).$$

Es ist nach (152)

$$F'(x) = -\int_{u_2}^{\infty}\frac{\sin x\varkappa}{\varkappa}d\varkappa.$$

Nehmen wir z. B. $\theta > 0$ an, so wird $\Delta q > 0$, und es folgt

$$J_1 = \lim_{x=0}\int_{u_2 x}^{\infty}\frac{\sin\varkappa}{\varkappa}d\varkappa = \frac{\pi}{2}.$$

Durch analoge Rechnungen erhält man noch

$$J_2 = \frac{\pi}{2}, \quad J_3 = 0$$

und gelangt also schliesslich zur Formel

$$(153)\qquad \frac{d\varrho(\lambda)}{d\lambda} = \pi q\,\omega(q)\,\omega_1(q)\frac{d\lambda}{dq}[\alpha(\lambda)\beta(-\lambda)-\alpha(-\lambda)\beta(\lambda)].$$

Wir wollen nun den Ausdruck

$$\Delta Z = \int_C \log\frac{R_0}{r_{xy}}\Delta A^*(y,\lambda)\,dy$$

untersuchen. R_0 bedeutet eine Zahl, die grösser als jeder Durchmesser von C ist. ΔZ ist eine für $x \neq x_1$ stetig differenzierbare Funktion. Um über das Verhalten in der Nähe von $x = x_1$ Aufschluss zu gewinnen, schreiben wir

$$\Delta Z = \int_C \log \frac{R_{st}}{r_{xy}} \Delta A^*(y, \lambda)\, dy + \int_C \log \frac{1}{R_{st}} \Delta A^*\, dy +$$

$$+ \log R_0 \int_C \Delta A^* dy,$$

wo R_{st} der Abstand zwischen zwei Punkten s und t $(x = \xi(s),\ y = \xi(t))$ auf dem S. 87 eingeführten Kreiszweieck bedeutet. Durch analoge Abschätzungen wie auf S. 10 finden wir, dass die Funktion

$$\Omega(s, t) = \log \frac{R_{st}}{r_{xy}}$$

in (s_1, s_1) stetig ist, und ferner, dass die Ableitungen $\frac{d\Omega(s,t)}{dt}$, $\frac{d^2\Omega(s,t)}{ds\,dt}$ in der Nähe dieses Punktes begrenzt sind. Mit der Bezeichnung

$$\int_{s_1}^{s} \Delta A^* \xi'(t)\, dt = k(s)$$

erhält man durch partielle Integration

$$J = \int_0^b \Omega(s, t)\, \Delta A^* \xi'(t)\, dt = \Omega(s, b) k(b) - \Omega(s, 0) k(0) -$$

$$- \int_0^b \frac{d\Omega(s,t)}{dt} k(t)\, dt.$$

Hieraus folgt, dass $\left|\frac{dJ}{ds}\right|$ unterhalb einer Konstanten liegt, und dass also J in $x = x_1$ einer Lipschitzschen Bedingung genügt.

Wir verstehen im folgenden mit $H_1(x), H_2(x) \cdots$ Funktionen, die in $x = x_1$ eine Hölдersche Bedingung erfüllen. ΔZ lässt sich in der Form

$$\Delta Z = \int_0^b \log \frac{1}{R_{st}} \Delta A^* \, dt + H_1(x)$$

darstellen. Wegen der Beschränktheit von ΔA^*_0 haben wir

$$\int_0^b \log \frac{1}{R_{st}} \Delta A^*_0 \, dt = H_2(x),$$

und somit ergibt sich wegen $\Delta A^* = \Delta A^*_1 + \Delta A^*_0$

$$\Delta Z = \int_0^b \log \frac{1}{R_{st}} \Delta A^*_1 \, dt + H_3(x).$$

Falls wir nun $\log \frac{1}{R_{st}}$ mit Hilfe von Formel (3) berechnen und z. B. $s \sim (u, \vartheta_2)$ annehmen, erhalten wir unter Anwendung der Bezeichnung

$$(-\alpha(-\lambda)\sin qu + \beta(-\lambda)\cos qu)\,\omega(q)\,q = F_2(q, u)$$

$$\int_0^b \log \frac{1}{R_{st}} \Delta A^*_1 \, dt = \frac{1}{2} \int_0^\infty [\log(ch\, u - \cos\vartheta_2) +$$

$$+ \log(ch\, x - \cos\vartheta_2) - \log(ch(u-x) - 1)] \cdot \int_q^{q+\Delta q} F_2(q, x)\, dq\, dx +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_0^\infty [\log(ch\, u - \cos\vartheta_2) +$$

$$+ \log(ch\, x - \cos\vartheta_1) - \log(ch(u-x) - \cos\alpha)] \cdot \int_q^{q+\Delta q} F_2(q, x)\, dq\, dx +$$

$$+ \log \frac{1}{2a^2} \int_0^\infty \int_q^{q+\Delta q} F_2(q, x)\, dq\, dx.$$

Es ist leicht zu sehen, dass wir mit den Funktionen

$$J' = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}[\log(ch\,u - \cos\vartheta_2) + \log(ch\,\varkappa - \cos\vartheta_2) - \\ - \log(ch(u-\varkappa)-1)]\cdot\int_{q}^{q+\Delta q} F_2(q,\varkappa)\,dq\,d\varkappa$$

(154)

$$J'' = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}[\log(ch\,u - \cos\vartheta_2) + \log(ch\,\varkappa - \cos\vartheta_1) - \\ - \log(ch(u-\varkappa) - \cos\alpha)]\cdot\int_{q}^{q+\Delta q} F_2(q,\varkappa)\,dq\,d\varkappa$$

ΔZ wie folgt schreiben können

(155) $$\Delta Z = J' + J'' + H_4(x).$$

Zur Berechnung von J' und J'' wenden wir das durch den Grenzprozess

$$\lim_{\varepsilon=0}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\varepsilon|\varkappa|} f(\varkappa)\,d\varkappa$$

definierte Verfahren an, um das Integral $\int_{-\infty}^{+\infty} f(\varkappa)\,d\varkappa$ zu summieren. Ein auf solche Weise evaluiertes Integral bezeichnen wir mit

$$\times\int_{-\infty}^{+\infty} f(\varkappa)\,d\varkappa.$$

Es empfiehlt sich, einen Satz über Vertauschbarkeit der Integrationsfolge vorauszuschicken. Sei $f(q,\varkappa)$ eine im Gebiet $q_0 \leq q \leq q_1$, $-\infty < \varkappa < +\infty$ definierte Funktion, welche den folgenden Bedingungen genügt

1.

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\varepsilon|\varkappa|} f(q,\varkappa)\,d\varkappa\right| < C_0,$$

wo C_0 eine von q und ε unabhängige Konstante bedeutet.

2. Die Integrationsfolge im Integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{q_0}^{q_1} e^{-\varepsilon|x|} f(q,x)\,dq\,dx$$

ist vertauschbar für $\varepsilon > 0$.

3. Es existiert das Integral

$$\times\int_{-\infty}^{+\infty} f(q,x)\,dx$$

für jedes q im Intervalle $q_0 < q \leq q_1$.

Falls diese Voraussetzungen erfüllt sind, existiert

$$\times\int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{q_0}^{q_1} f(q,x)\,dq,$$

und es gilt

$$\times\int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{q_0}^{q_1} f(q,x)\,dq = \int_{q_0}^{q_1} dq \times\int_{-\infty}^{+\infty} f(q,x)\,dx.$$

Dies folgt unmittelbar durch Grenzübergang ($\lim \varepsilon = 0$) in der nach 2. gültigen Relation

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\varepsilon|x|} \int_{q_0}^{q_1} f(q,x)\,dq\,dx = \int_{q_0}^{q_1} dq \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\varepsilon|x|} f(q,x)\,dx$$

unter Benutzung eines hier wegen 1. und 3. anwendbaren Fundamentalsatzes aus der Theorie der Lebesgueschen Integration.

Man findet durch partielle Integration, dass die Integrale

$$\times\int_{-\infty}^{+\infty} P(x)\cos qx\,dx, \quad \times\int_{-\infty}^{+\infty} P(x)\sin qx\,dx \quad (q \neq 0)$$

existieren, wo $P(x)$ ein beliebiges Polynom bedeutet.

Es ist leicht zu sehen, dass obiger Satz auf die Integrale J' und J'' anwendbar ist. Wir haben

$$\times\int_{-\infty}^{+\infty}\log(ch u-\cos\vartheta_2)\int_{q}^{q+\Delta q}[-\alpha(-\lambda)\sin q x+\beta(-\lambda)\cos q x]\omega(q)q\,dq\,dx=$$

$$-\log(ch u-\cos\vartheta_2)\int_{q}^{q+\Delta q}\omega(q)\,q[-\alpha(-\lambda)\times\int_{-\infty}^{+\infty}\sin q x\,dx+$$

$$+\beta(-\lambda)\times\int_{-\infty}^{+\infty}\cos q x\,dx]\,dq=0,$$

da

$$\times\int_{-\infty}^{+\infty}\sin q x\,dx=\times\int_{-\infty}^{+\infty}\cos q x\,dx=0.$$

Schreiben wir

$$\log(ch x-\cos\vartheta_2)=|x|+\log\frac{1}{2}+\log 2\,e^{-|x|}(ch x-\cos\vartheta_2),$$

so ergibt sich, dass

$$\times\int_{-\infty}^{+\infty}\log(ch x-\cos\vartheta_2)\int_{q}^{q+\Delta q}F_2(q,x)\,dq$$

existiert. Dieses Glied ist von u unabhängig. Mittelst einer Variabeltransformation finden wir für das dritte Glied J_1' in J' die Formel

$$J_1'=-\frac{1}{2}\times\int_{-\infty}^{+\infty}\log(ch x-1)\int_{q}^{q+\Delta q}q\omega(q)[-\alpha(-\lambda)\sin q(u+x)+$$

$$+\beta(-\lambda)\cos q(u+x)]\,dq\,dx=\frac{1}{2}\int_{q}^{q+\Delta q}q\omega(q)[\alpha(-\lambda)\cos q u+$$

$$+\beta(-\lambda)\sin qu]\overset{\times}{\int_{-\infty}^{+\infty}}\log(ch\varkappa-1)\sin q\varkappa d\varkappa dq-$$

$$-\frac{1}{2}\int_{q}^{q+\Delta q}q\omega(q)[\beta(-\lambda)\cos qu-$$

$$-\alpha(-\lambda)\sin qu]\overset{\times}{\int_{-\infty}^{+\infty}}\log(ch\varkappa-1)\cos q\varkappa d\varkappa dq.$$

Wegen der Relation

$$\overset{\times}{\int_{-\infty}^{+\infty}}\log(ch\varkappa-1)\sin q\varkappa d\varkappa=0$$

reduziert sich diese Gl. auf

$$J_1'=-\frac{1}{2}\int_{q}^{q+\Delta q}q\omega(q)[\beta(-\lambda)\cos qu-\alpha(-\lambda)\sin qu]\eta_1(q)dq,$$

wo

$$\eta_1(q)=\overset{\times}{\int_{-\infty}^{+\infty}}\log(ch\varkappa-1)\cos q\varkappa d\varkappa$$

gesetzt ist.

Für das in J'' auftretende zu J_1' analoge Glied J_1'' erhalten wir mit der Bezeichnung

$$\eta_2(q)=\overset{\times}{\int_{-\infty}^{+\infty}}\log(ch\varkappa-\cos\alpha)\cos q\varkappa d\varkappa$$

die Formel

$$J_1''=-\frac{1}{2}\int_{q}^{q+\Delta q}q\omega(q)[\beta(-\lambda)\cos qu-\alpha(-\lambda)\sin qu]\eta_2(q)dq.$$

Man sieht nun, dass ΔZ sich in der Gestalt

$$\Delta Z = J_1' + J_1'' + H_3(x)$$

darstellen lässt. Durch eine partielle Integration, deren Zulässigkeit man leicht bestätigen kann, finden wir

$$\eta_{11}(q) = -\frac{2}{q} \times \int_0^\infty \frac{sh\,\varkappa}{ch\,\varkappa - 1} \sin q\varkappa\, d\varkappa.$$

Dieses Integral evaluieren wir mittelst eines Grenzüberganges (lim $\lambda = 1$) in der folgenden von CAUCHY (Ann. Math. Nismes. 1826) gegebenen Formel[1]

$$(156)\quad \int_0^\infty \frac{sh\,\lambda x}{ch\,x + \cos\theta} \sin \mu x\, dx = \frac{\pi}{\sin\theta} \frac{sh\,\mu(\pi+\theta)\sin\lambda(\pi-\theta) - sh\,\mu(\pi-\theta)\sin\lambda(\pi+\theta)}{ch\,2\pi\mu - \cos 2\pi\lambda}.$$

Es ergibt sich

$$\eta_{11}(q) = -\frac{2}{q}\frac{\pi}{sh\,\pi q} ch\,\pi q$$

$$\eta_{12}(q) = -\frac{2}{q}\frac{\pi}{sh\,\pi q} ch\,\theta q.$$

[1] Aus der Formel (Vergl. S. 13)

$$\int_0^1 + \int_1^\infty \frac{x^\varkappa}{x^2 + 2x\cos\theta + 1}\, dx = \frac{\pi}{\sin\theta} \frac{\sin\varkappa\theta}{\sin\varkappa\pi}$$

ergibt sich, falls wir im ersten und zweiten Integral die Variabeltransformation $x = e^{-u}$ bzw. $x = e^u$ ausführen

$$\int_0^\infty \frac{e^{\varkappa u}}{ch\,u + \cos\theta}\, du = \frac{\pi}{\sin\theta} \frac{\sin\varkappa\theta}{\sin\varkappa\pi},$$

woraus (156) leicht durch Einführung komplexer $\varkappa$-Werte folgt.

Mit der Bezeichnung

$$\zeta(q) = \frac{\iota}{q} \frac{ch\,\iota q + ch\,\theta q}{sh\,\pi q}$$

finden wir also zum Schluss für ΔZ die Formel

$$(157)\quad \Delta Z = \int_{q}^{q+\frac{1}{2}q} q\omega(q)\zeta(q)[\beta(-\lambda)\cos qu - \alpha(-\lambda)\sin qu]dq + H_0(x).$$

Nach Ersetzen von x durch z in (144) multiplizieren wir diese Gl. mit $\log\frac{R_0}{r_{xz}}$ und integrieren bezüglich z. Da die Integrationsfolge in dem dabei auftretenden Doppelintegral wegen der Existenz von $\int_0^l |D(x,\lambda,\mu)|\,dx$ vertauschbar ist, so ergibt sich unter Berücksichtigung der Symmetrie von $\int_0^l K(x,z)\log\frac{R_0}{r_{zy}}dz$

$$\int_0^l \log\frac{R_0}{r_{xy}} C(y,\lambda,\mu)dy - \int_0^l K(x,y)\int_0^l \log\frac{R_0}{r_{yz}} D(z,\lambda,\mu)\,dz\,dy = 0.$$

Nach Differenzieren in bezug auf λ und μ folgt

$$\Delta Z - \int_0^l K(x,y)\,\Delta Y\,dy = 0,$$

wo

$$\Delta Y = \int_0^l \log\frac{R_0}{r_{xy}}\,\Delta B^*(y,\lambda)\,dy$$

gesetzt ist. Hieraus entnehmen wir, dass Z eine Differentiallösung von (75) darstellt. Es existiert somit eine solche stetige Funktion $\sigma(q)$, dass

$$\Delta Z = \int_q^{q+\Delta q} \Phi(x,\lambda)\, d\sigma = \int_q^{q+\Delta q} [\alpha(\lambda)\cos qu + \beta(\lambda)\sin qu]\, d\sigma + H_7(x).$$

Nach (157) gilt also

$$\int_q^{q+\Delta p} q\omega(q)\zeta(q)[\beta(-\lambda)\cos qu - \alpha(-\lambda)\sin qu]\, dq -$$

$$- \int_q^{q+\Delta q} [\alpha(\lambda)\cos qu + \beta(\lambda)\sin qu]\, d\sigma = H_8(x).$$

Falls σ stetige Ableitungen der drei ersten Ordnungen besitzt, finden wir durch partielle Integration und unter Berücksichtigung der Ungleichung $|H_8(x)| < C' e^{-\beta u}$ $(\beta > 0)$

$$\left[q\omega(q)\zeta(q)\frac{\beta(-\lambda)\sin qu + \alpha(-\lambda)\cos qu}{u}\right]_q^{q+\Delta q} -$$

$$- \left[\frac{d\sigma}{dq}\frac{\alpha(\lambda)\sin qu - \beta(\lambda)\cos qu}{u}\right]_q^{q+\Delta q} < \frac{C''}{u^2}$$

(C' nnd C'' Konstanten)

Hieraus erschliesst man die Gültigkeit der Gl.

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{dq}\alpha(\lambda) &= q\omega(q)\zeta(q)\beta(-\lambda) \\ \frac{d\sigma}{dq}\beta(\lambda) &= -q\omega(q)\zeta(q)\alpha(-\lambda). \end{aligned} \tag{158}$$

Dass die obengenannten Bedingungen für $\sigma(q)$ im vorliegenden Falle erfüllt sind, folgt aus dem Satz: Stetige Funktionen σ_1 und σ_2, welche der Ungl.

$$\left| \int_{q_0}^{q_1} [e^{iqu}\, d\sigma_1 + e^{-iqu}\, d\sigma_2] + k \right| < C''' e^{-\beta u}, \tag{159}$$

wo k eine Konstante bedeutet Genüge leisten, sind analytisch im Intervalle $0 < q_0 < q < q_1$. Zum Beweise beachten wir, dass wegen (159) die Funktion

$$F(z) = \int_0^{\infty} e^{-izu} \int_{q_0}^{q_1} [e^{iqu}\, d\sigma_1 + e^{-iqu}\, d\sigma_2]\, du$$

im Gebiete $|I[z]| < \beta$, $R[z] > 0$ holomorph ist. Nach Integration unterm Integralzeichen ergibt sich für $I[z] < 0$

$$F(z) = i \int_{q_0}^{q_1} \frac{d\sigma_1}{q - z} - i \int_{q_0}^{q_1} \frac{d\sigma_2}{q + z}.$$

Es ist also die Funktion $\int_{q_0}^{q_1} \frac{d\sigma_1}{q - z}$, und damit auch ihr Integral $-\int_{q_0}^{q_1} \log(q - z)\, d\sigma_1$, im Intervalle (q_0, q_1) regulär analytisch. Durch partielle Integration findet man nun, dass $\int_{q_0}^{q_1} \frac{\sigma_1}{z - q}\, dq$, und damit auch die Differenz $-2\pi i \sigma_1(z)$ der zugehörigen Randwerte auf der oberen bzw. unteren Seite der reellen Achse, für $q_0 < z < q_1$ reguläre Funktionen sind. Analoges gilt für $\sigma_2(q)$.

Aus den Gleichungen (158) in Verbindung mit (153) ergibt sich

$$\int_0^l \int_0^l \log \frac{R_0}{r_{xy}}\, \Delta A^*(x, \lambda)\, \Delta A^*(y, \lambda)\, dx\, dy =$$

$$= \pi \int_q^{q + \Delta q} q^2\, \omega(q)^2 [\alpha(-\lambda)^2 + \beta(-\lambda^2]\, \zeta(q)\, dq = \tag{160}$$

$$= \pi \int_q^{q + \Delta q} q^2\, \omega(q)^2\, \zeta(q)\, dq$$

wegen $\alpha(-\lambda)^2 + \beta(-\beta)^2 = 1$. Setzen wir nun

$$\omega(q) = \sqrt{\frac{d\lambda}{dq}} \Big/ \sqrt{\pi q^2 \zeta(q)},$$

so nimmt der Ausdruck (160) den Wert $\Delta\lambda$ an.

Wegen $\alpha(\lambda)^2 + \beta(\lambda)^2 = \alpha(-\lambda)^2 + \beta(-\lambda)^2 = 1$ bekommt man aus (158)

$$\left(\frac{d\sigma}{dq}\right)^2 = q^2 \omega(q)^2 \cdot \zeta(q)^2.$$

Ferner gilt die Relation

$$\alpha(\lambda)\alpha(-\lambda) + \beta(\lambda)\beta(-\lambda) = 0.$$

Führen wir, nach geeigneter Wahl der Vorzeichen von $\Phi(x,\lambda)$ und $\Phi(x,-\lambda)$ die Funktionen

$$\Phi^*(x,\lambda) = \sqrt{\frac{\zeta(q)}{\pi \frac{d\lambda}{dq}}} \cdot \Phi(x,\lambda)$$

(161)

$$\Psi^*(x,\lambda) = -\frac{1}{\sqrt{\pi q^2 \zeta(q) \frac{d\lambda}{dq}}} \Phi'_x(x,-\lambda)$$

ein, so finden wir, dass für die Differentiallösungen

$$\Delta A(x,\lambda) = \int_{\lambda}^{\lambda+\Delta\lambda} \Phi^*(x,\lambda)\, d\lambda$$

(162)

$$\Delta A^*(x,\lambda) = \int_{\lambda}^{\lambda+\Delta\lambda} \Psi^*(x,\lambda)\, d\lambda$$

die Gleichung

$$\int_0^l \Delta_1 A\, \Delta_2 A^*\, dx = \Delta_{12}\lambda$$

besteht.

§ 11.

Über symmetrisierbare Kerne.

Ehe wir das Problem der Entwicklung willkürlicher Funktionen nach den Eigenfunktionen und Differentiallösungen des Kernes $\frac{\cos(n_y r_{yx})}{\pi r_{xy}}$ in Angriff nehmen, wollen wir die entsprechende Aufgabe für stetig gekrümmte Berandung behandeln. Zu diesem Zwecke werden zunächst einige allgemeine Entwicklungssätze betreffs symmetrisierbarer Kerne hergeleitet.[1] Lalesco[2] gibt zwar einige hierhergehörige Theoreme an, jedoch sind seine Beweise unvollständig. Korn[3] beweist analoge Sätze unter der Annahme, dass der Kern neben der Symmetrisierbarkeit andere spezielle Eigenschaften besitzt. Hier sollen dagegen solche Entwicklungstheoreme gesucht werden, für deren Gültigkeit die blosse Symmetrisierbarkeit ausreicht.

Sei also $K(x, y)$ eine im Gebiete $a < \frac{x}{y} \leq b$ stetige Funktion, zu welcher es einen symmetrischen definiten Kern $S(x, y)$ von solcher Beschaffenheit gibt, dass

$$N(x, y) = \int_a^b S(x, t) K(t, y) dt$$

symmetrisch wird. Wir wenden bei der folgenden Untersuchung die Hilbertsche Theorie der unendlichen quadratischen Formen an. Um die Lösbarkeit der Gl.

$$u(x) - \lambda \int_a^b K(x, y) u(y) dy = 0 \tag{163}$$

in Verbindung mit einer solchen quadratischen Form zu bringen, führen wir das zu $S(x, y)$ gehörige normierte Orthogonalsystem $\varphi_1(x), \varphi_2(x) \cdots \cdots \varphi_n(x) \cdots$ ein.

[1] Diese Kerne sind zuerst von Marty behandelt worden. C. R. 150, 1910, p. 515, 603, 1031, 1499.

[2] Lalesco, Introduction à la théorie des équations intégrales.

[3] Tôhoku, Mathematical Journal 1911—1912.

Es ist

$$\int_a^b S(x,y)\,\varphi_p(y)\,dy = \varkappa_p\,\varphi_p(x) \quad (0 < \varkappa_p < \varkappa_0).$$

Die Fourier-Koeffizienten von $u(x)$ in bezug auf $\varphi_1\,\varphi_2\cdots\varphi_n\cdots$ mögen $\alpha_1\,\alpha_2\cdots\alpha_n\cdots$ sein. Multiplizieren wir die aus (163) folgende Relation

$$\int_a^b S(x,y)\,u(y)\,dy - \lambda\int_a^b N(x,y)\,u(y)\,dy = 0.$$

mit $\varphi_p(x)$, so ergibt sich nach Integration

$$\varkappa_p\,\alpha_p - \lambda\int_a^b g_p(x)\,u(x)\,dx = 0. \tag{164}$$

$$g_p(x) = \int_a^b N(x,y)\,\varphi_p(y)\,dy.$$

Durch Anwendung der Vollständigkeitsrelation[1] können wir (164) schreiben

$$\varkappa_p\,\alpha_p - \lambda\sum_{q=1}^{\infty} a_{pq}\,\alpha_q = 0, \tag{165}$$

wo

$$a_{pq} = \int_a^b\int_a^b N(x,y)\,\varphi_p(x)\,\varphi_q(y)\,dx\,dy$$

gesetzt ist. Machen wir in (165) die Transformation

$$\alpha_i\sqrt{\varkappa_i} = x_i,$$

so ergibt sich

[1] Vergl. Hilbert, Grundzüge einer allg. Theorie der lin. Integralgl. S. 177.

$$x_p - \lambda \sum_{q=1}^{\infty} \frac{a_{pq}}{\sqrt{\varkappa_p \varkappa_q}} x_q = 0 .$$

Wir wollen nun zeigen, dass die quadratische Form

$$C(x) = \Sigma c_{pq} x_p x_q = \Sigma \frac{a_{pq}}{\sqrt{\varkappa_p \varkappa_q}} x_p x_q \tag{166}$$

vollstetig ist. Zu diesem Zwecke führen wir die Bezeichnungen

$$k_{pq} = \int_a^b \int_a^b K(x, y) \varphi_p(x) \varphi_q(y) \, dx \, dy$$

$$k_p(x) = \int_a^b K(y, x) \varphi_p(y) \, dy$$

ein. Durch abermalige Anwendung der Vollständigkeitsrelation ergibt sich

$$\sum_{q=1}^{\infty} k_{pq}^2 = \int_a^b k_p(y)^2 \, dy$$

$$\sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} k_{pq}^2 \leq \int_a^b \Sigma (k_p(x))^2 \, dx = \int_a^b \int_a^b (K(x, y))^2 \, dx \, dy . \tag{167}$$

Aus der Relation

$$a_{pq} = \int_a^b \int_a^b \int_a^b S(x, t) K(t, y) \varphi_p(x) \varphi_q(y) \, dx \, dt \, dy = \varkappa_p k_{pq} = \varkappa_q k_{qp}$$

folgt

$$c_{pq}^2 = k_{pq} k_{qp} . \tag{168}$$

Die Ungl.

$$c_{pq}^2 = k_{pq} k_{qp} < \frac{1}{2} (k_{pq}^2 + k_{qp}^2)$$

zeigt nun, dass Σc_{pq}^2 konvergiert, und ferner, dass

$$\sum_{p,q} c_{pq}^2 \leq \sum_{p,q} k_{pq}^2 \leq \int_a^b \int_a^b (K(x,y)^2 \, dx \, dy .$$

Es ist somit die Vollstetigkeit von $C(x)$ bewiesen.

Nach der Hilbertschen Theorie können wir also ein System linearer orthogonaler Formen $L_1(x)$, $L_2(x) \cdots L_n(x) \cdots$ von solcher Beschaffenheit finden, dass

$$C(x) = \frac{(L_1(x))^2}{\lambda_1} + \frac{(L_2(x))^2}{\lambda_2} + \cdots \frac{(L_p(x))^2}{\lambda_p} + \cdots \tag{169}$$

$$\lim_{p=\infty} \lambda_p = \infty .$$

Dieses System können wir mittelst anderer Formen $M_1(x)$, $M_2(x) \cdots$ zu einem vollständigen ergänzen, so dass die Gl.

$$\begin{aligned} (x,y) = \Sigma x_i y_i = L_1(x) L_1(y) + L_2(x) L_2(y) + \cdots \\ + M_1(x) M_1(y) + M_2(x) M_2(y) + \cdots \end{aligned} \tag{170}$$

gültig wird. Schreiben wir

$$L_p(x) = \sum_{q=1}^{\infty} l_{pq} x_q , \; M_p(x) = \sum_{q=1}^{\infty} m_{pq} x_q ,$$

so folgt aus (169)

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} l_{pi} c_{qi} &= \frac{1}{\lambda_p} l_{pq} \\ \sum_{i=1}^{\infty} m_{pi} c_{qi} &= 0 . \end{aligned} \tag{171}$$

Die Reihe

$$\psi_p(x) = \sum_{q=1}^{\infty} V_{\varkappa_q} l_{pq} k_q(x)$$

ist wegen

$$|\varkappa_q| < |\varkappa_{q+1}|$$

$$\sum_{q=1}^{\infty} l_{pq}^2 = 1$$

$$\sum_{q=1}^{\infty} (k_p(x))^2 = \int_a^b (K(y,x))^2 dy$$

absolut und gleichmässig konvergent. Wir haben also nach (171), da $k_{qr} = \sqrt{\frac{\varkappa_r}{\varkappa_q}}\, c_{qr}$,

$$\int_a^b \psi_p(x)\, \varphi_r(x)\, dx = \sum_{q=1}^{\infty} \sqrt{\varkappa_q}\, l_{pq}\, k_{qr} = \sqrt{\varkappa_r} \sum_{q=1}^{\infty} l_{pq}\, c_{qr} = \frac{\sqrt{\varkappa_r}}{\lambda_p} l_{pr}.$$

Hieraus findet man unter Anwendung der Vollständigkeitsrelation

$$\int_a^b K(y,x)\, \psi_p(y)\, dy = \sum_{q=1}^{\infty} \frac{\sqrt{\varkappa_q}}{\lambda_p} l_{pq}\, k_q(x) = \frac{1}{\lambda_p}\, \psi_p(x);$$

$\psi_p(x)$ ist also eine zum Eigenwert λ_p gehörige Eigenfunktion der Gl.

$$\psi(x) - \lambda \int_a^b K(y,x)\, \psi(y)\, dy = 0. \tag{172}$$

Führen wir nun die Grössen mit konvergenter Quadratsumme

$$x_p = \sqrt{\varkappa_p}\, k_p(x), \quad y_p = h_p \sqrt{\varkappa_p} = \sqrt{\varkappa_p} \int_a^b h(x)\, \varphi_p(x)\, dx$$

in (170) ein, so ergibt sich, da $L_p(x) = \psi_p(x)$, $M_p(x) = 0$[1]

[1] Es folgt nämlich aus $(171)_2$, dass alle Fourier-Koeffizienten von $M_p(x)$ Null werden.

$$(173) \qquad \sum_{p=1}^{\infty} \varkappa_p h_p k_p(x) = \sum_{p=1}^{\infty} L_p(y)\, \psi_p(x).$$

Da $\varkappa_p k_p(x)$ die Fourier-Koeffizienten

$$\int_a^b N(x,y)\, \varphi_p(y)\, dy$$

sind, erhält man aus (173) unter Berücksichtigung der Vollständigkeits-Relation

$$(174) \qquad \int_a^b N(x,y)\, h(y)\, dy = \sum_{p=1}^{\infty} L_p(y)\, \psi_p(x).$$

Es hat sich somit ergeben: *Jede in der Form*

$$\int_a^b N(x,y)\, h(y)\, dy,$$

[*wo* $h(y)$ *quadratisch integrierbar ist*] *darstellbare Funktion lässt sich in eine absolut und gleichmässig konvergente nach den Fundamentalfunktionen der Gl.* (172) *fortschreitende Reihe entwickeln.*

Die vorstehenden Entwicklungen zeigen, dass jeder Eigenwert der Form $C(x)$ ein Eigenwert des Kernes $K(x,y)$ ist. $K(x,y)$ kann keine anderen Eigenwerte haben. Denn substituieren wir in (174) für $h(x)$ eine Lösung der Gl.

$$u^*(x) - \lambda^* \int_a^b K(x,y)\, u^*(y)\, dy = 0,$$

wo λ^* von den Eigenwerten der Form $C(x)$ verschieden ist, so finden wir nach Multiplizieren mit $u^*(x)$ und darauf folgender Integration, wegen $\int_a^b u^*(x)\, \psi_i(x)\, dx = 0$, dass

$$\frac{1}{\lambda^*}\int_a^b\int_a^b S(x,y)\,u^*(x)\,u^*(y)\,dx\,dy = 0$$

sein müsste, was unsren Voraussetzungen über $S(x,y)$ widersprechen würde.

Da die Quadratsumme der Koeffizienten einer beschränkten quadratischen Form bei orthogonalen Transformationen invariant bleibt, so folgt

$$\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_p^2} = \sum_{pq} c_{pq}^2 = \sum_{pq} k_{pq}\,k_{qp} \tag{175}$$

k_{pq} und k_{qp} sind die Fourier-Koeffizienten vom Index q der Funktionen

$$k_p(x) = \int_a^b K(y,x)\,\varphi_p(y)\,dy$$

bzw.

$$k_p^*(x) = \int_a^b K(x,y)\,\varphi_p(y)\,dy.$$

Aus der Vollständigkeitsbeziehung folgt nun

$$\sum_{q=1}^{\infty} k_{pq}\,k_{qp} = \int_a^b k_p(x)\,k_p^*(x)\,dx.$$

Also

$$\sum_p\sum_q k_{pq}\,k_{qp} = \sum_{p=1}^{\infty}\int_a^b k_p(x)\,k_p^*(x)\,dx. \tag{176}$$

Die Vollständigkeitsrelation ergibt wieder

$$\sum_{p=1}^{\infty} k_p(x)\,k_p^*(x) = \int_a^b K(x,t)\,K(t,x)\,dt = K^{(2)}(x,x).$$

Die Ungl.

$$\left|\sum_{q=1}^{N} k_p(x)\, k^*_p(x)\right| < \sqrt{\sum_{p=1}^{N} (k_p(x))^2 \cdot \sum_{p=1}^{N} (k^*_p(x))^2} <$$

$$\leq \sqrt{\int_a^b (K(y,x))^2\, dy \int_a^b (K(x,y))^2\, dy}$$

zeigt, dass $\left|\sum_{p=1}^{N} k_p(x)\, k^*_p(x)\right|$ kleiner als eine von N und x unabhängige Konstante bleibt. Aus der Relation

$$\sum_{p=1}^{N} \int_a^b k_p(x)\, k^*_p(x)\, dx = \int_a^b \sum_{p=1}^{N} k_p(x)\, k^*_p(x)\, dx$$

folgt also unter Benutzung eines Fundamentalsatzes aus der Theorie der Lebesgueschen Integration

$$\sum_{p=1}^{\infty} \int_a^b k_p(x)\, k^*_p(x)\, dx = \int_a^b \sum_{p=1}^{\infty} k_p(x)\, k^*_p(x)\, dx = \int_a^b K^{(2)}(x,x)\, dx.$$

Die Formeln (176) und (175) ergeben nun

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_p^2} = \int_a^b K^{(2)}(x,x)\, dx. \tag{177}$$

Da $\Sigma \frac{1}{\lambda_p^2}$ konvergiert, erhalten wir für den zum Kerne $K(x,y)$ gehörigen Fredholmschen Nenner $D(\lambda)$ die kanonische Darstellung

$$D(\lambda) = e^{\alpha\lambda^2 + \beta\lambda} \prod_{p=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_p}\right) e^{\frac{\lambda}{\lambda_p}}.$$

Hieraus folgt die Entwicklung

$$\frac{D'(\lambda)}{D(\lambda)} = \beta + \left(2\alpha - \Sigma \frac{1}{\lambda_p^2}\right)\lambda - \lambda^2 \Sigma \frac{1}{\lambda_p^3}.$$

Es gilt aber auch

$$\frac{D'(\lambda)}{D(\lambda)} = -\int_a^b K(x,x)\,dx - \lambda\int_a^b K^{(2)}(x,x)\,dx\cdots$$

Durch Vergleich der Koeffizienten von λ erhält man

$$2\alpha = \sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_p^2} - \int_a^b K^{(2)}(x,x)\,dx\,.$$

Mit Hilfe von (177) findet man also

$$\alpha = 0$$

oder m. a. W. *der zu einem stetigen symmetrisierbaren Kerne gehörige* Fredholmsche *Nenner hat höchstens den Rang Eins.* Dies Resultat sucht Privaloff[1] zu beweisen. Er stützt sich aber auf den oben erwähnten unbewiesenen Entwicklungssatz von Lalesco.

Sei $u_1(x), u_2(x)\cdots u_n(x)\cdots$ ein vollständiges, gemäss den Bedingungen

$$\int_a^b\int_a^b S(x,y)\,u_p(x)\,u_q(y)\,dx\,dy = \begin{matrix}0 & (p\neq q)\\ 1 & (p=q)\end{matrix}$$

normiertes System von Fundamental-Funktionen der Gl. (163). Die Funktionen

$$\psi_p(x) = \int_a^b S(x,y)\,u_p(y)\,dy$$

repräsentieren dann sämtliche Fundamentalfunktionen von (172).

Mit auf diese Weise normierten Funktionen $\psi_p(x)$ können wir die Entwicklung (174) schreiben

$$\int_a^b N(x,y)\,h(y)\,dy = \sum_{p=1}^{\infty}\frac{h_\mu}{\lambda_p}\psi_p(x), \tag{179}$$

[1] Математическій сБорникъ, Москва 1915.

wo

$$h_p = \int_a^b \psi_p(x)\, h(x)\, dx.$$

Machen wir die Annahme, dass $S(x, y)$ begrenzt ist, so lässt sich ein Entwicklungssatz beweisen, der (179) als Spezialfall enthält. Zu diesem Zwecke setzen wir in die mit der Besselschen analoge Ungl.

$$\Sigma\left(\int_a^b f(x)\,\psi_p(x)\,dx\right)^2 \leq \int_a^b\int_a^b S(x,y)\, f(x)\, f(y)\, dx\, dy$$

für $f(x)$ eine auf folgende Weise definierte Funktion $f_\delta(x)$ ein.

1) $$f_\delta(x) = 1 \quad |x-y| < \frac{\delta}{2}$$

2) $$f_\delta(x) = 0 \quad |x-y| \geq \frac{\delta}{2}.$$

Ist M eine obere Grenze für $|S(x, y)|$, so folgt

$$\sum_{p=1}^{N}\left[\frac{\int_a^b f_\delta(x)\,\psi_p(x)\,dx}{\delta}\right]^2 \leq M.$$

Durch Grenzübergang (lim $\delta = 0$) erhält man

$$\sum_{p=1}^{N} (\psi_p(y))^2 < M.^1$$

Also konvergiert die Reihe $\sum_{p=1}^{\infty} (\psi_p(x))^2$ und ihre Summe ist höchstens M. Setzen nun in (179) $h(x) = \frac{f_\delta(x)}{\delta}$. Da wegen der Ungl.

[1] Diese Methode gestattet auch, einige Untersuchungen von E. Garbe (Math. Ann. 76) über polare Integralgleichungen zu vereinfachen.

$$\sum_{p=N}^{\infty} \left| \frac{h_p}{\lambda_p} \psi_p(x) \right| \leq \frac{1}{|\lambda_N|} \sqrt{\sum_{p=N}^{\infty} h_p^2 \cdot \sum_{p=N}^{\infty} (\psi_p(x))^2} \leq \frac{M}{|\lambda_N|}$$

die Reihe (179) in bezug auf δ gleichmässig konvergiert, ergibt sich durch Grenzübergang

$$N(x,y) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\psi_p(x)\,\psi_p(y)}{\lambda_p}. \tag{180}$$

Wir wollen nun die vorstehenden Resultate zur Herleitung einiger Reihenentwicklungen anwenden, welche nach den Fundamentalfunktionen des Kernes $K(s,t) = \dfrac{\cos(n_t r_{ts})}{\pi r_{ts}}$ (in bezug auf eine stetig gekrümmte Kurve C) fortschreiten.[1] Es ist

$$\int_0^l K(s,\tau) \log \frac{R_0}{r_{\tau t}} d\tau = M(s,t)$$

eine symmetrische Funktion. Wählen wir R_0 so gross, dass

$$\frac{R_0}{r_{st}} > 1 \quad \left(0 < \frac{s}{t} < l\right),$$

so wird $\log \dfrac{R_0}{r_{st}}$ ein positiver definiter Kern. Denn mit den Bezeichnungen

$$\omega(s) = f(s) - \varrho(s) \int_0^l f(t)\,dt \tag{181}$$

$$V(p) = \int_0^l \log \frac{R_0}{r_{pt}} \omega(t)\,dt,$$

worin $\varrho(s)$ die natürliche Belegung auf $C\left(\int_0^l \varrho(s)\,ds = 1\right)$, haben wir

[1] Vgl. Korn Rend. d. circ. matem. di Palermo T. XXXV, 1913.

$$(182)\quad \int_0^l\int_0^l \log\frac{R_0}{r_{st}}\,\omega(s)\,\omega(t)\,ds\,dt = \frac{1}{2\pi}\iint\left[\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy.$$

Das letzte Integral ist über die ganze Ebene zu erstrecken. Falls wir den Wert von $\omega(s)$ aus (181) in (182) einsetzen, ergibt sich

$$(183)\quad \int_0^l\int_0^l \log\frac{R_0}{r_{st}}\,f(s)\,f(t)\,ds\,dt = k\left[\int_0^l f(s)\,ds\right]^2 + \\ + \frac{1}{2\pi}\iint\left[\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy,$$

worin $k = \int_0^l \log\frac{R_0}{r_{st}}\varrho(t)\,dt > 0$. Aus (183) folgt nun unmittelbar, dass $\log\frac{R_0}{r_{st}}$ positiv definit ist.

Nach dem Vorherigen gilt also die Entwicklung

$$(184)\quad \int_0^l M(s,t)\,g(t)\,dt = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{g_i\,\varphi_i(s)}{\lambda_i}$$

$$\left(g_i = \int_0^l \varphi_i(s)\,g(s)\,ds\right),$$

worin $\varphi_i(s)$ mittelst der zur Gleichung

$$\psi(s) - \lambda\int_0^l K(t,s)\,\psi(t)\,dt = 0$$

gehörigen, gemäss

$$\int_0^l\int_0^l \log\frac{R_0}{r_{st}}\,\psi_p(s)\,\psi_q(t)\,ds\,dt = \begin{matrix}1 & (p=q)\\ 0 & (p\neq q)\end{matrix}$$

normierten Eigenfunktionen, durch die Gl.

(185) $$\varphi_i(s) = \int_0^l \log \frac{R_0}{r_{st}} \psi_i(t)\, dt$$

definiert wird.

Nehmen wir an, dass die Koordinaten von C mit ihren drei ersten Ableitungen stetige Funktionen von s sind, so gibt es eine stetige Lösung $\Omega(s,t)$ der Gl.

$$\int_0^l \log \frac{R_0}{r_{s\tau}} \Omega(\tau, t)\, d\tau = K(s,t).$$

Ein Vergleich der hieraus folgenden Gl.

$$\varphi_i(s) = \lambda_i \int_0^l \log \frac{R_0}{r_{st}} \int_0^l \Omega(t,\tau)\, \varphi_i(\tau)\, d\tau\, dt$$

mit (185) ergibt, da eine zu $\log \frac{R_0}{r_{st}}$ orthogonale Funktion notwendig verschwinden muss, dass

$$\psi_i(s) = \lambda_i \int_0^l \Omega(s,t)\, \varphi_i(t)\, dt.$$

Wegen der für beliebige $f(s)$ gültigen Ungleichung

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left[\int_0^l f(s)\, \varphi_i(s)\, ds \right]^2 < \int_0^l \int_0^l \log \frac{R_0}{r_{st}} f(s)\, f(t)\, ds\, dt$$

konvergiert also die Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(\psi_i(x))^2}{\lambda_i^2}$ und somit auch $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{g_i\, \psi_i(x)}{\lambda_i}$. Unter Benutzung von (185) können wir (184) in der Form

$$\int_0^l \log \frac{R_0}{r_{st}} \left[\int_0^l K(\tau, t)\, g(\tau)\, d\tau - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{g_i\, \psi_i(t)}{\lambda_i} \right] dt = 0$$

schreiben, woraus folgt

$$\int_0^l K(t,s)g(t)\,dt = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{g_i \psi_i(s)}{\lambda_i}. \tag{187}$$

Es hat sich somit ergeben: Jede in der Form

$$\int_0^l K(t,s)\,g(t)dt$$

darstellbare Funktion lässt sich in eine nach den Fundamentalfunktionen $\psi_i(x)$ fortschreitende Reihe entwickeln. Als Spezialfall erhält man

$$K^{(2)}(s,t) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(s)\,\psi_i(t)}{\lambda_i^2}.$$

(187) ergibt auch für die Lösung von

$$\psi(s) - \lambda \int_0^l K(t,s)\,\psi(t)dt = g(s)$$

die Formel

$$\psi(s) = g(s) + \lambda \sum_{i=1}^{\infty} \frac{g_i}{\lambda_i - \lambda}\,\psi_i(s).$$

Da der zu $K(s,t)$ gehörige Fredholmsche Nenner $D(\lambda)$ höchstens den Rang Eins besitzt, so gilt die Darstellung

$$D(\lambda) = e^{a\lambda} \prod \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_i}\right) e^{\frac{\lambda}{\lambda_i}}$$

Laut einem Resultate von Plemelj (Jabl. Ges. S. 85) liegen die von Eins verschiedenen Eigenwerte λ_i paarweise symmetrisch in bezug auf den Nullpunkt. Wir können also schreiben

$$D(\lambda) = e^{a\lambda}(1-\lambda) \prod_{\lambda_i < 0} \left[1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_i}\right)^2\right].$$

Aus der Gl.

$$\frac{D'(\lambda)}{D(\lambda)} = a - 1 - \lambda\left(1 + 2\sum\frac{1}{\lambda_i^2}\right)\cdots =$$

$$= -\int_0^l K(s,s)ds - \lambda\int_0^l K^{(2)}(s,s)ds\ldots$$

folgt

$$a = 1 - \int_0^l K(s,s)ds.$$

Berücksichtigen wir nun, dass

$$K(s,s) = \frac{1}{2\pi}\frac{d\theta}{ds},$$

worin θ den Winkel bezeichnet, welchen die Tangente in s mit der x-Achse bildet, so folgt $\int_0^l K(s,s)ds = 1$, d. h. $a = 0$.

Also

$$D(\lambda) = (1-\lambda)\prod_{\lambda_i<0}\left[1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_i}\right)^2\right].$$

Der zum dreidimensionalen Randwertproblem gehörige Kern $K(p,q)$ ist mit $\frac{1}{r_{pq}}$ symmetrisierbar. Es besteht auch hier die absolut und gleichmässig konvergente Reihenentwicklung[1]

$$\int_S M(p,q)g(q)d\sigma_q = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{g_i\varphi_i(p)}{\lambda_i}, \tag{188}$$

wo

$$M(p,q) = \int_S K(p,q')\frac{1}{r_{q'q}}d\sigma_{q'}$$

Ferner gilt

[1] Dies lässt sich mittelst einer in § 12 angewandten Methode zeigen.

$$\sum g_i^2 \leq \int\int \frac{1}{r_{pq}} g(p) g(q) d\sigma_p d\sigma_q. \tag{189}$$

Setzen wir nun, mit T_i und T_a den Innen- bzw. Aussenraum bezeichnend,

$$V(p) = \int_S \frac{1}{r_{pq}} g(q) d\sigma_q$$

$$J = \frac{1}{4\pi} \int_{T_i} \left[\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2 \right] dx\, dy\, dz$$

$$J' = \frac{1}{4\pi} \int_{T_a} \left[\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2 \right] dx\, dy\, dz,$$

so ergibt sich aus (188) nach Multiplizieren mit $g(p)$ und darauf folgender Integration

$$J' - J = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{g_i^2}{\lambda_i}. \tag{190}$$

Die Ungl. (189) lässt sich schreiben:

$$\sum_{i=1}^{\infty} g_i^2 \leq J + J' \tag{191}$$

Die Fundamentalfunktionen $\psi_i(p)$ wurden von POINCARÉ[1] als Lösungen gewisser Variationsprobleme eingeführt. Er definierte $\psi_1(p)$ als diejenige Funktion $g(p)$, welche $\frac{J}{J'}$ zu einem Minimum macht. $\psi_2(p)$ ergab sich durch Hinzufügung der Nebenbedingung

$$\int_S V \left(\frac{\partial V_1}{\partial n}\right)_e d\sigma = 0,$$

wo

$$V_1(p) = \int_S \frac{1}{r_{pq}} \psi_1(q) d\sigma_q,$$

usw.

[1] Acta Mathematica. Bd. 20.

Man sieht leicht, dass die eben genannten Variationsprobleme durch Rekursion auf folgende Weise formuliert werden können: Es wird unter allen auf S stetigen, den Bedingungen

$$(192) \qquad \iint \frac{1}{r_{pq}} g(p)\psi_i(q)\,d\sigma_p\,d\sigma_q = 0 \quad (i = 1, 2 \cdots n-1)$$

genügenden Funktionen $g(p)$ eine solche, $\psi_n(p)$, gesucht, welche $\frac{J}{J'}$ möglichst klein macht. Diese Aufgabe lässt sich nun mit Hilfe von (190) und (191) vollständig behandeln. Wir bezeichnen die positiven Eigenwerte mit $\lambda_1^+, \lambda_2^+ \cdots \lambda_n^+ \cdots$, die negativen mit $\lambda_1^-, \lambda_2^- \cdots \lambda_n^- \cdots$, und die entsprechenden Eigenfunktionen schreiben wir $\psi_1^+, \psi_2^+ \cdots \psi_n^+ \cdots$ bzw. $\psi_1^-, \psi_n^- \cdots \psi_n^- \cdots$. Es ist ohne weiteres klar, dass $\frac{J}{J'} = 0$ für $g(p) = \psi_1^+(p)$. Mit der Bezeichnung

$$g_i^+ = \iint \frac{1}{r_{pq}} \psi_i^+(p)\, g(q)\, d\sigma_p\, d\sigma_q$$

folgt aus (190) und (191), falls $g_1^+ = 0$, die Ungl.

$$J' - J < \sum_{i=2}^{\infty} \frac{(g_i^+)^2}{\lambda_i^+} \leq \frac{1}{\lambda_2^+} \sum_{i=2}^{\infty} (g_i^+)^2 \leq \frac{J + J'}{\lambda_2^+}.$$

Wegen $\lambda_2^+ > 1$ wird also

$$\frac{J}{J'} > \frac{\lambda_2 - 1}{\lambda_2 + 1}.$$

Das Gleichheitszeichen gilt für $g(p) = \psi_2(p)$. Analog erhält man für $g_1^+ = g_2^+ = \cdots = g_{n-1}^+ = 0$

$$J' - J < \frac{J + J'}{\lambda_n^+}$$

oder

$$\frac{J}{J'} > \frac{\lambda_n^+ - 1}{\lambda_n^+ + 1} = \frac{J(\psi_n^+)}{J'(\psi_n^+)}.$$ [1]

Um zu den negativen Eigenwerten zu gelangen, suchen wir das Maximum von $\frac{J}{J'}$. Wir haben

$$J' - J > \frac{1}{\lambda_1^-}(J + J').$$

Hieraus folgt

$$\frac{J}{J'} < \frac{\lambda_1^- - 1}{\lambda_1^- + 1} = \frac{J(\psi_1^-)}{J'(\psi_1^-)}.$$ [2]

Für $g_1^- = g_2^- = \cdots = g_{n-1}^- = 0$ ergibt sich

$$\frac{J}{J'} \leq \frac{\lambda_n^- - 1}{\lambda_n^- + 1} = \frac{J(\psi_n^-)}{J'(\psi_n^-)}.$$

Sei nun $K(s,t)$ die zu einer Kurve C mit Ecken gehörige Funktion

$$K(s,t) = \frac{1}{\pi}\frac{\cos(n_t r_{ts})}{r_{st}}.$$

Wir können wie auf S. 148 die Lösbarkeit der entsprechenden Integralgl. mit Hilfe der Eigenfunktionen $\omega_n(s)$ des Kernes $\log \frac{R_0}{r_{st}}$ $\left(\int_C \log \frac{R_0}{r_{st}} \omega_n(t)\,dt = \varkappa_n \omega_n(s)\right)$ in Verbindung mit einer quadratischen Form $A(x) = \sum a_{pq} x_p x_q$ bringen, deren Koeffizienten durch

$$a_{pq} = \frac{\int_C \int_C M(s,t)\omega_p(s)\omega_q(t)\,ds\,dt}{\sqrt{\varkappa_p \varkappa_q}}$$

[1] Um die Abhängigkeit von $g(p)$ hervorzuheben, setzen wir $J = J(g)$ $J' = J'(g)$.

[2] Eine Ungl. dieser Form spielt in den Untersuchungen Poincarés eine fundamentale Rolle.

definiert werden, worin, wie vorher,

$$M(s,t) = \int_C K(s,\tau) \log \frac{R_0}{r_{\tau t}} d\tau$$

gesetzt ist. Da

$$\int_C \int_C (K(s,t))^2 ds\, dt$$

in diesem Falle divergiert, ist es nicht möglich, wie oben zu beweisen, dass $A(x)$ vollstetig ist. Dagegen können wir auf folgende Weise zeigen, dass $A(x)$ eine beschränkte Form ist. Sei $C^{(r)}$ eine Kurve, welche aus C durch Abrundung der Ecken mittelst kleiner Kreise vom Radius r (Vgl. nebenst. Fig.) hervorgeht. Die mit $M(s,t), \omega(s)$, usw. analogen Funktionen bezüglich $C^{(r)}$ bezeichnen wir $M^{(r)}(s,t)$, $\omega^{(r)}(s)$ usw. Da $C^{(r)}$ begrenzte Krümmung besitzt, so ist nach dem Vorigen

$$A^{(r)}(x) = \sum a_{pq}^{(r)} x_p x_q$$

eine vollstetige Form. Aus der Tatsache, dass $K^{(r)}(s,t)$ keinen Eigenwert zwischen -1 und $+1$ besitzt, folgert man, unter Berücksichtigung dass $A^{(r)}(x)$ und $K^{(r)}(s,t)$ dieselben Eigenwerte haben, die Ungl.

$$\left| \sum a_{pq}^{(r)} x_p x_q \right| \leq \sum x_p^2. \tag{193}$$

Es lässt sich zeigen, dass

$$\lim_{r=0} a_{pq}^{(r)} = a_{pq}{}^{1}$$

Machen wir nun in der wegen (193) für ein beliebiges N gültigen Formel

[1] Hierbei bedient man sich der Tatsache, dass $\varphi_n^{(r)}(s)$ gleichmässig gegen $\varphi_n(s)$ konvergiert, was sich durch Anwendung der iterierten Kerne $\int_{C^{(r)}} \log \frac{R_0}{r_{s\tau}} \log \frac{R_0}{r_{\tau t}} d\tau$ leicht beweisen lässt.

$$\left| \sum_{p,q}^{N} a_{pq}^{(r)} x_p x_q \right| < \sum_{p=1}^{N} x_p^2$$

einen Grenzübergang, so folgt

$$\left| \sum_{p,q}^{N} a_{pq} x_p x_q \right| < \sum_{p=1}^{N} x_p^2,$$

woraus die Beschränktheit der Form $A(x)$ hervorgeht.

§ 12.

Entwicklung willkürlicher Funktionen nach den Eigenfunktionen und Differentiallösungen des Kernes $K(x,y)$.

Um einen bestimmten Fall vor Augen zu haben, machen wir in diesem Paragraphen die Annahme $\theta > 0$. Wir normieren die auf S. 119 besprochenen Eigenfunktionen der Gl. (127) auf eine solche Weise, dass

$$\int_0^l \int_0^l \log \frac{R_0}{r_{xy}} \psi_p(x) \psi_q(y)\, dx\, dy = \begin{cases} 0 & (p \neq q) \\ 1 & (p = q) \end{cases} \tag{194}$$

Setzen ferner

$$\varphi_p(x) = \int_0^l \log \frac{R_0}{r_{xy}} \psi_p(y)\, dy. \tag{195}$$

Wir definieren bei Anwendung der Bezeichnung $m(q) = \frac{sh\pi q}{sh\theta q}$ die Funktionen $\Phi^*(x,\lambda)$ und $\Psi^*(x,\lambda)$ durch folgende Festsetzungen:

1) Für $\lambda\theta > \pi$

$$\begin{aligned} \Phi^*(x,\lambda) &= \sqrt{\frac{\zeta(q)}{\pi m'(q)}}\, \Phi(x,\lambda) \\ \Psi^*(x,\lambda) &= \frac{1}{\sqrt{\pi q^2 m'(q)\zeta(q)}}\, \Phi_x'(x,-\lambda) \end{aligned} \tag{196}$$

2) $\lambda\theta < -\pi$

$$\Phi^*(x,\lambda) = \sqrt{\frac{\zeta_1(q)}{\pi m'(q)}}\,\Phi(x,\lambda)$$

(197)

$$\Psi^*(x,\lambda) = -\frac{1}{\sqrt{\pi q^2 m'(q)\zeta_1(q)}}\,\Phi_x'(x,-\lambda),$$

worin

$$\zeta_1(q) = \frac{\pi}{q}\,\frac{ch\,\pi q - ch\,\theta q}{sh\,\pi q}.$$

Verfügt man über das unbestimmte Vorzeichen in $\Phi(x,\lambda)$ auf solche Weise, dass für $\lambda\theta > \pi$

(198) $$\alpha(\lambda)\beta(-\lambda) - \alpha(-\lambda)\beta(\lambda) = 1,$$

so genügen, wie mittelst der Methoden und Resultate von § 10 leicht zu bestätigen ist, die Differentiallösungen

$$\Delta A(x,\lambda) = \int_{\lambda}^{\lambda+\Delta\lambda} \Phi^*(x,\lambda)\,d\lambda$$

$$\Delta A^*(x,\lambda) = \int_{\lambda}^{\lambda+\Delta\lambda} \Psi^*(x,\lambda)\,d\lambda$$

der Relation

(199) $$\int_0^l \Delta_1 A(x,\lambda)\,\Delta_2 A(x,\lambda)\,dx = \Delta_{12}\lambda.$$

Die Gl. (198) in Verbindung mit

$$\alpha(-\lambda)^2 + \beta(-\lambda)^2 = \alpha(\lambda)^2 + \beta(\lambda)^2 = 1,\ \alpha(\lambda)\alpha(-\lambda) + \beta(\lambda)\beta(-\lambda) = 0$$

ergibt

(200) $$\alpha(\lambda) = \beta(-\lambda),\ \beta(\lambda) = -\alpha(-\lambda) \quad (\lambda > 0).$$

Ist (λ_1, λ_2) ein innerhalb L oder L' gelegenes Intervall

und $\omega(\lambda)$ eine zweimal stetig differentiierbare Funktion, so gilt für $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$

$$(201) \qquad I = \int_0^l \Phi^*(x,\lambda) \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \omega(\mu)\, \Psi^*(x,\mu) d\mu\, dx = \omega(\lambda).$$

Es gilt nämlich wegen der gleichmässigen Konvergenz von I für $\lambda_1 + \varepsilon < \lambda < \lambda_2 - \varepsilon$

$$I = \frac{d}{d\lambda} \int_0^l \Delta^{(\lambda_1,\lambda)} A(x,\lambda) \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \omega(\mu)\, \Psi^*(x,\mu)\, d\mu\, dx =$$

$$= \frac{d}{d\lambda} \int_0^l \Delta^{(\lambda_1,\lambda)} A(x,\lambda) \Big[\omega(\lambda_2)\, \Delta^{(\lambda_1,\lambda_2)} A^*(x,\lambda) -$$

$$- \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \omega'(\mu)\, \Delta^{(\lambda_1,\mu)} A^*(x,\mu)\, d\mu \Big] dx = \frac{d}{d\lambda} \Big[(\lambda - \lambda_1)\, \omega(\lambda_2) -$$

$$- \int_{\lambda_1}^{\lambda} (\mu - \lambda_1)\, \omega'(\mu)\, d\mu - \int_{\lambda}^{\lambda_2} (\lambda - \lambda_1)\, \omega'(\mu)\, d\mu \Big] = \omega(\lambda).$$

Liegt dagegen λ ausserhalb (λ_1, λ_2), so ergibt sich

$$(202) \qquad \int_0^l \Phi^*(x,\lambda) \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \omega(\mu)\, \Psi^*(x,\mu)\, d\mu\, dx = 0.$$

Es bestehen auch die Beziehungen

$$(203) \qquad \int_0^l \psi_i(x)\, \Phi^*(x,\lambda)\, dx = 0$$

$$(204) \qquad \int_0^l \varphi_p(x) \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \omega(\mu)\, \Psi^*(x,\mu)\, d\mu\, dx = 0.$$

Nehmen wir an, dass die Funktion $f(x)$ eine gleichmässig konvergente Darstellung von der Form

$$(205) \qquad f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \psi_i(x) + \int_{L+L'} \omega(\lambda) \Psi^*(x, \lambda)\, d\lambda$$

zulässt, so ergibt sich wegen (194) und (204) durch Multiplizieren mit $\varphi_p(x)$ und Integrieren bezüglich x

$$c_p = \int_0^l f(x) \varphi_p(x)\, dx.$$

Multiplizieren wir dagegen mit $\Phi^*(x, \lambda)$, so folgt mit Hilfe von (201), (202) und (203)

$$\omega(\lambda) = \int_0^l \Phi^*(x, \lambda) f(x)\, dx.$$

Auf analoge Weise kann man $f(x)$ die Entwicklung

$$(206) \qquad f(x) \sim \sum_{i=1}^{\infty} b_i \varphi_i(x) + \int_{L+L'} \sigma(\lambda) \Phi^*(x, \lambda)\, d\lambda$$

zuordnen, worin

$$b_i = \int_0^l f(x) \psi_i(x)\, dx, \quad \sigma(\lambda) = \frac{d}{d\lambda} \int_0^l A^*(x, \lambda) f(x)\, dx$$

gesetzt ist.

Der auf S. 157 gegebene Beweis für das Bestehen der Ungl.

$$(207) \qquad \int_0^l \int_0^l \log \frac{R_0}{r_{xy}} f(x) f(y)\, dx\, dy \geq 0$$

ist auch für eine Berandung mit Ecken gültig, falls wir über $f(x)$ die Voraussetzungen in Satz III § 1 machen. Durch

einen Grenzübergang findet man, dass (207) sicher gilt, wenn nur das Doppelintegral absolut konvergiert. Es ist für das folgende notwendig zu wissen, dass obige Ungleichung auch für Funktionen von der Form

$$f(x) = h(x) + \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \omega(\lambda)\, \Psi^*(x, \lambda)\, d\lambda$$

anwendbar bleibt, worin $h(x)$ von solcher Beschaffenheit ist, dass

$$\int_0^l \int_0^l \log \frac{R_0}{r_{xy}} |h(x)||h(y)|\, dx\, dy$$

konvergiert. Zum Beweise schreiben wir

$$f(x, \lambda, \mu) = h(x) + \int_{\mu}^{\lambda} \omega(\nu)\, \Psi^*(x, \nu)\, d\nu$$

und nehmen $h(x)$ zunächst als begrenzt an. Die Funktion

$$F(x, d) = \int_{\lambda_1}^{\lambda_1 + d} \int_{\lambda_2}^{\lambda_2 + d} f(x, \lambda, \mu)\, d\lambda\, d\mu$$

genügt der Ungl.

$$|F(x, d)| < \frac{C_0}{|x - x_1| \log^2 \frac{R_0}{|x - x_1|}}$$

(Mit $C, C_0, C_1, C_2 \cdots$ verstehen wir gewisse positive Konstanten) Wegen der Relation

$$\int_0^l \log \frac{R_0}{r_{xy}} \frac{1}{|y - x_1| \log^2 \frac{R_0}{|y - x_1|}}\, dy < C \log \log \frac{R_0}{|x - x_1|} \tag{208}$$

deren Begründung später angedeutet wird, existiert also

$$\int_0^l \int_0^l \log \frac{R_0}{r_{xy}} |F(x,d)| \cdot |F(y,d)| \, dx \, dy .$$

Wir haben somit

$$\frac{1}{d^4} \int_0^l \int_0^l \log \frac{R_0}{r_{xy}} F(x,d) \, F(y,d) \, dx \, dy \geq 0 .$$

Mit den Bezeichnungen

$$S_1(x,\lambda,\mu) = \int_\mu^\lambda \omega(\nu) \Phi^*(x,\nu) \, d\nu$$

$$S_2(x,\lambda,\mu) = \int_\mu^\lambda \omega(\nu) \Psi^*(x,\nu) d\nu$$

können wir diese Ungl. wie folgt schreiben

$$\int_0^l \int_0^l \log \frac{R_0}{r_{xy}} h(x) \, h(y \, dx \, dy + \frac{2}{d^2} \int_0^l h(x) \int_{\lambda_1}^{\lambda_1+d} \int_{\lambda_2}^{\lambda_2+d} S_1(x,\lambda,\mu) d\lambda d\mu dx +$$

$$+ \frac{1}{d^4} \int_0^l \left[\int_{\lambda_1}^{\lambda_1+d} \int_{\lambda_2}^{\lambda_2+d} S_2(x,\lambda,\mu) \, d\lambda \, d\mu \int_{\lambda_1}^{\lambda_1+d} \int_{\lambda_2}^{\lambda_2+d} S_1(x,\lambda,\mu) d\lambda d\mu \right] dx > 0 .$$

Durch Grenzübergang (Lim $d = 0$) folgt hieraus die mit der zu beweisenden Ungleichung äquivalente Relation

$$\int_0^l \int_0^l \log \frac{R_0}{r_{xy}} h(x) \, h(y) \, dx \, dy + 2 \int_0^l h(x) \, S_1(x, \lambda_2, \lambda_1) \, dx +$$

$$+ \int_0^l S_1(x, \lambda_2, \lambda_1) \, S_2(x, \lambda_2, \lambda_1) \, dx > 0 .$$

Mittelst eines neuen Grenzüberganges in dieser Formel können wir die bezüglich $h(x)$ gemachte Einschränkung beseitigen.

Um die Richtigkeit von (208) zu ersehen, können wir uns darauf beschränken, die Ungl.

$$I_1 = \int_0^r \log \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{1}{y \log^2 \frac{1}{y}}\, dy < C_1 \log\log \frac{1}{x} \quad \left(r < \frac{1}{e}\right)$$

$$I_2 = \int_0^r \log \frac{1}{|y-x|} \cdot \frac{1}{y \log^2 \frac{1}{y}}\, dy < C_2 \log\log \frac{1}{x}$$

zu beweisen. Es gilt

$$I_1 = \int_0^x + \int_x^r \log \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \frac{1}{y \log^2 \frac{1}{y}}\, dy < \log \frac{1}{x} \int_0^x \frac{1}{y \log^2 \frac{1}{y}}\, dy +$$

$$+ \int_x^r \frac{1}{y \log \frac{1}{y}}\, dy = 1 + \left[-\log\log \frac{1}{y} \right]_x^r < 1 + \log\log \frac{1}{x} <$$

$$< C_1 \log\log \frac{1}{x}.$$

Ferner haben wir

$$I_2 = \int_0^{\frac{x}{2}} + \int_{\frac{x}{2}}^{\frac{3x}{2}} + \int_{\frac{3x}{2}}^r \log \frac{1}{|y-x|} \frac{dy}{y \log^2 \frac{1}{y}} < \log \frac{2}{x} \int_0^{\frac{x}{2}} \frac{1}{y \log^2 \frac{1}{y}}\, dy +$$

$$+ \frac{2}{x \log^2 \frac{2}{x}} \int_{-\frac{x}{2}}^{\frac{x}{2}} \log \frac{1}{|y|}\, dy + C_3 \int_{\frac{3x}{2}}^r \frac{1}{y \log \frac{1}{y}}\, dy < C_2 \log\log \frac{1}{x}.$$

Teilen nun zwei beliebige Intervalle (λ_1, λ_2) und (λ_1', λ_2') auf L bzw. L' in Teilintervalle Δ_i. Die Funktionen

$$\frac{\Delta_i A^*(x, \lambda)}{V \Delta_i \lambda}$$

genügen den Relationen

$$\int_0^l \int_0^l \log \frac{R_0}{r_{xy}} \frac{\Delta_p A^*(x,\lambda)}{\sqrt{\Delta_p \lambda}} \cdot \frac{\Delta_q A^*(y,\lambda)}{\sqrt{\Delta_q \lambda}} dx\,dy = \begin{matrix} 0 & (p \neq q) \\ 1 & (p = q) \end{matrix}$$

$$\int_0^l \int_0^l \log \frac{R_0}{r_{xy}} \frac{\Delta_p A^*(y,\lambda)}{\sqrt{\Delta_p \lambda}} \psi_i(x)\,dx\,dy = 0. \tag{209}$$

Sei $f(x)$ eine solche Funktion, dass $\int_0^l \int_0^l \log \frac{R_0}{r_{xy}} f(x) f(y) dx\,dy$ absolut konvergiert. Ersetzen wir in (207) $f(x)$ mit

$$f(x) - \sum_{i=1}^{N} \psi_i(x) \int_0^l f(y)\,\varphi_i(y)\,dy - \sum \frac{\Delta_i A^*(x,\lambda) \int_0^l \Delta_i A(y,\lambda) f(y) dy}{\Delta_i \lambda},$$

so folgt wegen (194) und (209)

$$\sum_{i=1}^{N} \left[\int_0^l \varphi_i(x) f(x)\,dx\right]^2 + \sum \frac{\left[\int_0^l \Delta_i A(x,\lambda) f(x)\,dx\right]^2}{\Delta_i \lambda} < \leq \int_0^l \int_0^l \log \frac{R_0}{r_{xy}} f(x) f(y)\,dx\,dy.$$

Lassen wir die Grössen $\Delta_i \lambda$ nach Null konvergieren, so ergibt sich

$$\sum_{i=1}^{N} f_i^2 + \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} f_\lambda^2\,d\lambda + \int_{\lambda'_1}^{\lambda'_2} f_\lambda^2\,d\lambda < \int_0^l \int_0^l \log \frac{R_0}{r_{xy}} f(x) f(y)\,dx\,dy,$$

worin

$$f_i = \int_0^l \varphi_i(x) f(x)\,dx, \quad f_\lambda = \int_0^l \Phi^*(x,\lambda) f(x)\,dx$$

gesetzt ist. Hieraus folgt

$$\sum_{i=1}^{\infty} f_i^2 + \int_{L+L'} f_\lambda^2 d\lambda < \int_0^l \int_0^l \log \frac{R_0}{r_{xy}} f(x) f(y)\, dx\, dy. \tag{210}$$

Die zu einer Funktion

$$f(x) = \int_0^l M(x, y) h(y)\, dy$$

mit

$$M(x, y) = \int_0^l K(x, z) \log \frac{R_0}{r_{zy}}\, dz$$

gehörige Entwicklung nach $\varphi_i(x)$ und $\Phi^*(x, \lambda)$ ist

$$E = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{h_i \varphi_i(x)}{\lambda_i} + \int_{L+L'} \frac{h_\lambda \Phi^*(x, \lambda)}{\lambda} d\lambda.$$

Wegen

$$\left| \frac{h_\lambda \Phi^*(x, \lambda)}{\lambda} \right| = \left| h_\lambda \int_0^l K(x, y)\, \Phi^*(y, \lambda)\, dy \right| <$$

$$< \frac{1}{2} \left[h_\lambda^2 + \left(\int_0^l K(x, y) \Phi^*(y, \lambda)\, dy \right)^2 \right]$$

folgt aus den Ungl.

$$\int_{L+L'} h_\lambda^2 d\lambda \leq \int_0^l \int_0^l \log \frac{R_0}{r_{xy}} h(x) h(y)\, dx\, dy$$

$$\int_{L+L'} \left[\int_0^l K(x, y) \Phi^*(y, \lambda)\, dy \right]^2 d\lambda < \int_0^l \int_0^l \log \frac{R_0}{r_{st}} K(x, s) K(x, t)\, ds\, dt,$$

dass

$$\int_{L+L'} \frac{h_i \Phi^*(x,\lambda)}{\lambda} d\lambda$$

absolut konvergiert. Dasselbe gilt für $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{h_i \varphi_i(x)}{\lambda_i}$.

Wir wollen nun zeigen, dass

$$E = \int_0^l M(x,y)\, h(y) dy.$$

Zu diesem Zwecke müssen wir das Verhalten von $\Phi^*(x,\lambda)$ und $\Psi^*(x,\lambda)$ in der Nähe von $\lambda = \pm \frac{\pi}{\theta}$ kennen. Es gilt die Entwicklung

$$\sqrt{\frac{\varepsilon(q)}{\pi m'(q)}} = c_0 q^{-\frac{3}{2}}(1 + c_1 q^2 + \cdots).$$

$\Phi(x,\lambda)$ lässt sich als Quotient zweier in $q=0$ regulärer Potenzreihen schreiben. Berücksichtigen wir noch, dass wegen der Konvergenz von $\int_{L+L'} \frac{(\Phi^*(x,\lambda))^2}{\lambda^2} d\lambda$ $\Phi^*(x,\lambda)$ höchstens wie $q^{-\frac{1}{2}}$ unendlich werden kann, so gilt für $\lambda = m(q)$ die Darstellung

$$\Phi^*(x,\lambda) = c_0 q^{-\frac{3}{2}}(1 + c_1 q^2 + \cdots)[\alpha(\lambda)(\cos qu - 1) + \beta(\lambda) \sin qu] + q^{-\frac{1}{2}} \Phi_1(x,q), \tag{211}$$

worin $\Phi_1(x,q)$ regulär in $q=0$ ist und eine beschränkte Ableitung bezüglich x besitzt. Auf analoge Weise findet man (unter Berücksichtigung von (200)) in der Umgebung von $\frac{\pi}{\theta}$

$$\Psi^*(x,\lambda) = \frac{ch\, u - \cos \vartheta_j}{a} c_0' (1 + c_1' q^2 + \cdots) q^{\frac{1}{2}} [\alpha(\lambda) \cos qu + \beta(\lambda) \sin qu] + q^{-\frac{1}{2}} \Psi_1(x,q) \qquad [x \sim s \sim (u, \vartheta_j)], \tag{212}$$

wo $\Psi_1(x,q)$ hinsichtlich x beschränkt ist.

Für $\lambda = -m(q)$ erhält man analog:

$$\Phi^*(x,\lambda) = (-1)^j q^{-\frac{1}{2}} b_0 (1 + b_1 q^2 + \cdots)[\alpha(\lambda)\cos qu + \beta(\lambda)\sin qu] + q^{-\frac{1}{2}}\Phi_2(x,q) \tag{213}$$

$$\Psi^*(x,\lambda) = (-1)^j \frac{ch\, u}{a} - \cos\vartheta_j b'_0 q^{-\frac{1}{2}}(1 + b'_1 q^2 + \cdots)[\alpha(\lambda)\cos qu + \beta(\lambda)\sin qu] + q^{-\frac{1}{2}}\Psi_2(x,q), \tag{214}$$

worin über $\Phi_2(x,q)$ und $\Psi_2(x,q)$ dieselben Aussagen gelten wie für $\Phi_1(x,q)$ und $\Psi_1(x,q)$. Ein Vergleich von $\dfrac{d\Phi^*(x,q)}{dx}$ mit $\Psi^*(x,-\lambda)$ zeigt, dass $\Psi_1(x,q)$ und $\Psi_2(x,q)$ in $q=0$ regulär sind.

$\alpha\left(\frac{\pi}{\theta}\right)$ und $\beta\left(\frac{\pi}{\theta}\right)$ können nicht beide von Null verschieden sein. Denn aus der Gl.

$$\Phi^*(x,\lambda) + \left(\frac{\pi}{\theta} + cq^2 + \cdots\right)\int_0^l K(x,y)\Phi^*(y,\lambda)\,dy = 0$$

geht hervor, dass die Koeffizienten der Potenzen $q^{-\frac{1}{2}}$ und $q^{\frac{1}{2}}$ in (213) Lösungen der Gl.

$$\varphi(x) + \frac{\pi}{\theta}\int_0^l K(x,y)\varphi(y)\,dy = 0 \tag{215}$$

sind; es würde in diesem Falle also (215) zwei linear unabhängige unstetige Lösungen haben, was aber nach § 9 unmöglich ist. Machen wir die Annahme $\beta\left(\frac{\pi}{\theta}\right) = 0$, so wird $\Phi_2(x,0)$ eine stetige Lösung von (215), die wegen (203) zu allen Lösungen der Gl.

$$\psi(x) + \frac{\pi}{\theta}\int_0^l K(y,x)\psi(y)\,dy = 0$$

orthogonal sein müsste. Hieraus folgt, dass $\Phi_2(x, 0)$ identisch verschwindet, und somit, dass $\Phi^*(x, \lambda)$ sich in der Form

$$\Phi^*(x, \lambda) = \overset{1}{q^2}. \text{ reg. Funktion}$$

schreiben lässt.

Betrachten nun die Funktion

$$g(x, r) = h(x) - \sum_{|\lambda_i| < r} h_i \psi_i(x) - \int_{\overset{\cdot}{\pi}}^{\overset{r}{\cdot}} h_\lambda \Psi^*(x, \lambda)\, d\lambda - \int_{-r}^{-\overset{\pi}{\theta}} h_\lambda \Psi^*(x, \lambda)\, d\lambda.$$ [1]

Man findet unmittelbar durch partielle Integration und bei Anwendung von (211)···(214), dass

$$\int_{\overset{\cdot}{\pi}}^{\overset{r}{\cdot}} h_\lambda \Psi^*(x, \lambda)\, d\lambda.$$

eine integrierbare Funktion von x ist. Dasselbe gilt bezüglich

$$\int_{-r}^{-\overset{\pi}{\theta}} h_\lambda \Psi^*(x, \lambda)\, d\lambda$$

Hierbei benutzen wir, dass sich h_λ im Falle $\beta\begin{pmatrix}\pi\\ \theta\end{pmatrix} = 0$ in der Gestalt

$$h_\lambda = \overset{1}{q^2}. \text{ reg. Funktion}$$

darstellen lässt. Aus (201) und (203) folgt für $|\lambda| < r$

[1] Falls

$$\varphi(x) \pm \frac{\pi}{\theta} \int_{\overset{\cdot}{0}}^{\overset{l}{\cdot}} K(x, y)\, \varphi(y)\, dy = 0$$

stetige Lösungen besitzt, so wird $\pm\frac{\pi}{\theta}$ zu den Eigenwerten λ_i gerechnet.

$$\int_0^l g(x,r)\Phi^*(x,\lambda)\,dx = 0.$$

Da es vorzuziehen ist, mit absolut integrierbaren Funktionen zu operieren, führen wir

$$\gamma(x) = \int_R^{R+\Delta R} g(x,r)\,dr$$

ein. Es gilt

$$|\gamma(x)| < \frac{c}{|x-x_1|\log^2 \frac{R_0}{|x-x_1|}}. \tag{216}$$

Die Lösung $\psi(x,\lambda)$ der Gl.

$$\psi(x,\lambda) - \lambda\int_0^l K(y,x)\psi(y,\lambda)\,dy = \gamma(x) \tag{217}$$

ist wegen

$$\int_0^l \Phi^*(x,\lambda)\gamma(x)dx = 0 \quad (|\lambda| < R)$$

für $|\lambda| < R$ eine eindeutige Funktion von λ.[1] Die Gl. (194) und (204) ergeben

$$\int_0^l \varphi_p(x)\gamma(x)dx = 0 \quad (|\lambda_p| < R),$$

woraus bei Anwendung von (108) folgt, dass $\psi(x,\lambda)$ in $\lambda_p\left(\lambda_p \pm \frac{\pi}{\theta}, |\lambda_p| < R\right)$ regulär ist. Ferner kann $\psi(x,\lambda)$ in der Nähe von $\pm\frac{\pi}{\theta}$, wie aus dem System (78) leicht hervorgeht, nicht rascher als eine Potenz von $\lambda \mp \frac{\pi}{\theta}$ wachsen. In der Umgebung von z. B. $\frac{\pi}{\theta}$ gilt also die Entwicklung

[1] Vergl. S. 103.

$$(218)\quad \psi(x,\lambda)=\frac{B_p(x)}{\left(\lambda-\frac{\pi}{\theta}\right)^p}+\frac{B_{p-1}(x)}{\left(\lambda-\frac{\pi}{\theta}\right)^{p-1}}+\cdots B_0(x)+\cdots$$

Sei C_0 ein kleiner Kreis mit $\frac{\pi}{\theta}$ als Mittelpunkt. Unter Berücksichtigung der Resultate auf S. 73 folgt aus der Formel

$$B_n(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_0}\left(\lambda-\frac{\pi}{\theta}\right)^{n-1}\psi(x,\lambda)\,d\lambda,$$

dass $B_n(x)$ integrierbar ist. Setzen wir nun die Reihe (218) in (217) ein, so ergibt sich im Falle $p>1$

$$(219)\qquad B_p(x)-\frac{\pi}{\theta}\int_0^l K(y,x)B_p(y)dy=0$$

$$(220)\quad B_{p-1}(x)-\frac{\pi}{\theta}\int_0^l K(y,x)B_{p-1}(y)dy-\int_0^l K(y,x)B_p(y)dy=0.$$

Sei $\psi_{a_1}(x)$, $\psi_{a_2}(x)\cdots\psi_{a_n}(x)$ das vollständige, zum Parameterwert $\frac{\pi}{\theta}$ gehörige System von Eigenfunktionen der Gl. (127). (220) lässt sich schreiben

$$(221)\quad B_{p-1}(x)-\frac{\pi}{\theta}\int_0^l K(y,x)B_{p-1}(y)dy-\frac{\theta}{\pi}B_p(x)=0.$$

Multiplizieren mit $\varphi_{a_i}(x)$ und integrieren nach x. Beachten wir, dass die Integrationsfolge in dem auftretenden Doppelintegral vertauscht werden kann (Vgl. S. 95), so ergibt sich

$$\int_0^l B_p(x)\varphi_{a_i}(x)\,dx=0\ \ (i=1,2\cdots n).$$

Da wegen (219) $B_p(x)$ eine lineare Kombination von ψ_{a_1}, $\psi_{a_2}\cdots\psi_{a_n}$ ist, so muss $B_p(x)$ infolge dieser Relationen iden-

tisch verschwinden. p kann auch nicht gleich Eins sein. Denn aus der in diesem Falle gültigen Gleichung

$$B_0(x) - \frac{\pi}{\theta}\int_0^l K(y,x)\, B_0(y)\, dy - \frac{\theta}{\pi} B_1(x) = \gamma(x)$$

folgt

$$-\frac{\theta}{\pi}\int_0^l B_1(x)\, \varphi_{\alpha_i}(x)\, dx = \int_0^l \gamma(x)\, \varphi_{\alpha_i}(x)\, dx = 0 \quad (i = 1, 2 \cdots n).$$

Es ist somit bewiesen, dass $\psi(x,\lambda)$ für $|\lambda| < R$ holomorph ist.

Man findet leicht bei Anwendung der Resultate in § 8 und § 9, dass es zu jedem innerhalb S und des Kreises $|\lambda| < R$ gelegenen Gebiete eine solche Konstante c_0 gibt, dass

$$|\psi(x,\lambda)| < \frac{c_0}{|x - x_1| \log^2 \frac{R_0}{|x - x_1|}}. \tag{222}$$

Es ergibt sich auch ohne grössere Schwierigkeiten, dass jeder Zahl $R' < R$ eine solche Konstante c_1 zugeordnet werden kann, dass für die zwei Mal integrierte Funktion

$$\int_0^\lambda (\lambda - \mu)\, \psi(x,\mu)\, d\mu = \omega(x,\lambda)$$

die Ungl.

$$|\omega(x,\lambda)| < \frac{c_1}{|x - x_1| \log^2 \frac{R_0}{|x - x_1|}}$$

im Bereiche $|\lambda| < R' < R$ statthat. Hieraus schliesst man unter Berücksichtigung von (208), dass

$$G(\lambda) = \int_0^l \int_0^l \log \frac{R_0}{r_{xy}}\, \gamma(x)\, \omega(y,\lambda)\, dx\, dy$$

für $|\lambda| < R$ holomorph ist. Wenn λ weder L noch L' angehört, erhalten wir durch eine wegen (222) erlaubte Vertauschung der Integrationsfolge

$$G(\lambda) = \int_0^{\lambda} (\lambda - \mu) F(\mu) \, d\mu ,$$

worin

$$F(\lambda) = \int_0^l \int_0^l \log \frac{R_0}{r_{xy}} \gamma(x) \psi(y, \lambda) \, dx \, dy$$

gesetzt ist. Es folgt

$$F(\lambda) = \frac{d^2 G(\lambda)}{d\lambda^2} ,$$

woraus ersichtlich wird, dass $F(\lambda)$ für $|\lambda| < R$ holomorph ist.

Wegen der absoluten Integrierbarkeit von $\gamma(x)$ haben wir (Vergl. S. 15, 16, 25).

(223) $$\psi(x, \lambda) = \sum_{i=0}^{\infty} \gamma_i(x) \lambda^i$$

$$\gamma_i(x) = \int_0^l K^{(i)}(y, x) \gamma(y) \, dy, \quad \gamma_0(x) = \gamma(x).$$

Diese Reihe konvergiert gleichmässig für $|x - x_i| > \varepsilon$ wie klein ε auch sei. Wie später gezeigt werden soll, gibt es eine solche Konstante $\varkappa$, dass

(224) $$\int_0^l |K(x, z)| \log \frac{R_0}{r_{zy}} \, dz < \varkappa \log \frac{R_0}{r_{xy}} .$$

Hieraus folgt

$$(225)\quad \int_0^l\int_0^l \left|\log\frac{R_0}{r_{xy}}\gamma(x)\gamma_i(y)\right| dx\,dy <$$

$$< \varkappa^i \int_0^l\int_0^l \log\frac{R_0}{r_{xy}} |\gamma(x)|\cdot|\gamma(y)|\,dx\,dy.$$

Multiplizieren nun (223) mit $\int_0^l \log\frac{R_0}{r_{xy}}\gamma(y)\,dy$ und integrieren nach x. Die Ungl. (225) in Verbindung mit einem Reihensatz auf *S.* 16 ergibt, dass gliedweise Integration für $|\lambda| < \varkappa$ erlaubt ist. Es folgt also für $F(\lambda)$ die Potenzreihendarstellung

$$(226)\qquad F(\lambda) = \sum_{p=0}^{\infty} J_p \lambda^p$$

$$J_p = \int_0^l\int_0^l \log\frac{R_0}{r_{xy}}\gamma(x)\gamma_p(y)\,dx\,dy.$$

Um die Relation (224) zu beweisen, schreiben wir

$$M(x,y) = \int_C K(x,z)\log\frac{R_0}{r_{zy}}dz = \int_{|z-y|>|x-x_1|} K(x,z)\log\frac{R_0}{r_{zy}}dz +$$

$$+\int_{|z-y|<|x-x_1|} K(x,z)\log\frac{R_0}{r_{zy}}dz.$$

Mit $e_1, e_2\cdots$ verstehen wir gewisse positive Konstanten. Unter Berücksichtigung der Ungl.

$$|K(x,y)| < \frac{e_1}{|x-x_1|}$$

folgt:

$$\int_{|z-y|>|x-x_1|} K(x,z)\log\frac{R_0}{r_{zy}}dz < e_2\log\frac{R_0}{|x-x_1|}\int_C |K(x,z)|\,dz <$$

$$< e_3\log\frac{R_0}{|x-x_1|}$$

$$\int_{|z-y|<|x-x_1|} K(x,z)\log\frac{R_0}{r_{zy}}dz < \frac{e_4}{|x-x_1|}\int_{-|x-x_1|}^{|x-x_1|}\log\frac{R_0}{y}\cdot dy < e_5\log\frac{R_0}{|x-x_1|}$$

$$\left|\int_C K(x,z)\log\frac{R_0}{r_{zy}}dz\right| < e_6\log\frac{R_0}{|x-x_1|}.$$

Wegen der Symmetrie von $M(x,y)$ gilt auch

$$|M(x,y)| < e_6\log\frac{R_0}{|y-x_1|}.$$

Hieraus findet man ohne Schwierigkeiten, dass

$$|M(x,y)| < e_7\log\frac{R_0}{\sqrt{(x-x_1)^2+(y-x_1)^2}}$$

$$|M(x,y)| < e_8\log\frac{R_0}{r_{xy}}.$$

Es ist leicht zu sehen, dass eine ähnliche Ungl. gelten muss, falls wir $K(x,z)$ mit $|K(x,z)|$ ersetzen.

Da $F(\lambda)$ für $|\lambda| < R$ holomorph ist, so kann der Konvergenzradius der Reihe (226) nicht kleiner als R sein. Dasselbe gilt dann auch für die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} J_{2n}\lambda^{2n}. \tag{227}$$

Setzen wir in die Gl.

$$J_{p+q} = \int_0^l\int_0^l \log\frac{R_0}{r_{xy}}\gamma_p(x)\gamma_q(y)\,dx\,dy.$$

(Vergl. z. B Goursat, Cours d'analyse III p. 484.) $p = n-1$, $q = n+1$, so erhält man infolge einer bekannten Ungl.

$$J_{2n}^2 < J_{2n+2}J_{2n-2}.$$

Falls $J_2 \neq 0$, sind alle $J_{2n} \neq 0$ $(n = 0, 1, 2\cdots)$, und es gilt

$$\frac{J_2}{J_0} \leq \frac{J_4}{J_2} \leq \cdots \leq \lim_{n=\infty} \frac{J_{2n+2}}{J_{2n}} = \frac{1}{\varrho^2} \leq \frac{1}{R^2},$$

worin ϱ den Konvergenzradius der Reihe (227) bedeutet. Hieraus folgt

$$J_2 < \frac{J_0}{R^2}.$$

Berücksichtigen wir noch die Ungl.

$$J_1^2 < J_0 J_2,$$

so ergibt sich

$$|J_1| < \frac{J_0}{R}. \tag{228}$$

Durch Anwendung der Orthogonalitätsrelationen (194), (201) — (204) findet man:

$$J_0 = (\Delta R)^2 \int_0^l \int_0^l \log \frac{R_0}{r_{xy}} h(x)\, h(y)\, dx\, dy - 2\,\Delta R \int_R^{R+\Delta R} \int_{-r}^{r} h_\lambda^2\, d\lambda\, dr -$$

$$- 2\,\Delta R \int_R^{R+\Delta R} \int_{-r}^{\pi-\Theta} h_\lambda^2\, d\lambda\, dr + 2 \int_R^{R+\Delta R} du \int_R^{u} \int_{\pi-\Theta}^{\pi} h_\lambda^2\, d\lambda\, dv +$$

$$+ 2 \int_R^{R+\Delta R} du \int_R^{u} \int_{-r}^{\pi-\Theta} h_\lambda^2\, d\lambda\, dv - (\Delta R)^2 \sum_{|\lambda_i| < R} h_i^2$$

$$J_1 = (\Delta R)^2 \int_0^l \int_0^l M(x, y)\, h(x)\, h(y)\, dx\, dy + \text{Glieder, welche aus}$$

den entsprechenden in J_0 nach Ersetzen von h_λ^2 und h_i^2 durch $\frac{h_\lambda^2}{\lambda}$ bzw. $\frac{h_i^2}{\lambda_i}$ hervorgehen.

Dividieren wir (228) mit $(\Delta R)^2$ und lassen ΔR nach Null konvergieren, so ergibt sich

$$\left| \int_0^l \int_0^l M(x,y)\,h(x)\,h(y)\,dx\,dy - \sum_{|\lambda_i|<R} \frac{h_i^2}{\lambda_i} - \int_{\frac{\pi}{\Theta}}^{R} \frac{h_\lambda^2}{\lambda}\,d\lambda - \int_{-R}^{-\frac{\pi}{\Theta}} \frac{h_\lambda^2}{\lambda}\,d\lambda \right| <$$

$$< \frac{1}{R}\left[\int_0^l \int_0^l \log \frac{R_0}{r_{xy}}\,h(x)\,h(y)\,dx\,dy - \sum_{|\lambda_i|<R} h_i^2 - \int_{\frac{\pi}{\Theta}}^{R} h_\lambda^2\,d\lambda - \int_{-R}^{-\frac{\pi}{\Theta}} h_\lambda^2\,d\lambda \right] <$$

$$< \frac{1}{R} \int_0^l \int_0^l \log \frac{R_0}{r_{xy}}\,h(x)\,h(y)\,dx\,dy.$$

Durch einen neuen Grenzübergang (lim $R = +\infty$) findet man

$$\int_0^l \int_0^l M(x,y)\,h(x)\,h(y)\,dx\,dy = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{h_i^2}{\lambda_i} + \int_{L+L'} \frac{h_\lambda^2}{\lambda}\,d\lambda.$$

Substituieren wir in dieser Gl. statt $h(x)$ einmal $h(x)+g(x)$, das andere Mal $h(x)-g(x)$, so folgt nach Subtraktion der so erhaltenen Gleichungen

$$(229) \qquad \int_0^l \int_0^l M(x,y)\,h(x)\,g(y)\,dx\,dy = \sum \frac{h_i g_i}{\lambda_i} + \int_{L+L'} \frac{h_\lambda g_\lambda}{\lambda}\,d\lambda.$$

(229) lässt sich auch schreiben

$$\int_0^l g(x)\left[\int_0^l M(x,y)\,h(y)\,dy - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{h_i\,\varphi_i(x)}{\lambda_i} - \int_{L+L'} \frac{h_\lambda}{\lambda}\,\Phi^*(x,\lambda)\,d\lambda \right] dx = 0.$$

Da dies für beliebige $g(x)$ gilt, erhalten wir schliesslich die zu beweisende Relation

$$\int_0^l M(x,y)\,h(y)\,dy = E.$$

Es hat sich somit ergeben: *Für jede in der Gestalt*

$$\int_0^l M(x,y)\,h(y)\,dy^1$$

darstellbare Funktion gilt die absolut konvergente Entwicklung

$$(230)\qquad \int_0^l M(x,y)\,h(y)\,dy = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{h_i \varphi_i(x)}{\lambda_i} + \int_{L+L'} h_\lambda \frac{\Phi^*(x,\lambda)}{\lambda}\,d\lambda.$$

Durch Differenzieren von (230) nach x ergibt sich

$$(231)\qquad \int_0^l K'_x(x,y)\,\xi(y)\,dy = \sum_{i=1}^{\infty} h_i \int_0^l K'_x(x,y)\,\varphi_i(y)\,dy + \int_{L+L'} h_\lambda \int_0^l K'_x(x,y)\,\Phi^*(y,\lambda)\,dy\,d\lambda,$$

worin

$$\xi(x) = \int_0^l \log\frac{R_0}{r_{xy}}\,h(y)\,dy.$$

Es sind nämlich

$$\sum_{i=1}^{\infty} h_i \int_0^l K'_x(x,y)\,\varphi_i(y)\,dy$$

und

$$\int_{L+L'} h_\lambda \int_0^l K'_x(x,y)\,\Phi^*(y,\lambda)\,dy\,d\lambda$$

[1] Während des Beweisganges haben wir angenommen, dass $\int_0^l\int_0^l \log\frac{R_0}{r_{xy}}\,|h(x)|\cdot|h(y)|\,dx\,dy$ existiert, und ferner auch, dass h_λ eine Anzahl stetige Ableitungen besitzt. Letztgenannte Bedingung lässt sich durch einen Grenzübergang in der Formel (230) heben.

für $|x - x_1| > \varepsilon$ gleichmässig konvergent. Dies folgt z. B. für die Reihe aus der Ungl.

$$\left| \sum_{i=N}^{\infty} h_i \int_0^l K'_x(x, y)\, \varphi_i(y)\, dy \right| \leq$$

$$< \sqrt{\sum_{i=N}^{\infty} h_i^2} \sqrt{\int_0^l \int_0^l \log \frac{R_0}{r_{st}} K'_x(x, s)\, K'_x(x, t)\, ds\, dt}$$

Seien $\varphi_i^+(x)$, $\psi_i^+(x)$ und $\varphi_i^-(x)$, $\psi_i^-(x)$ die zu den positiven bzw. negativen Eigenwerten (λ_i^+ bzw. λ_i^-, $\lambda_i^+ + \lambda_i^- = 0$) gehörigen Eigenfunktionen. Man erhält aus (231) nach partieller Integration unter Berücksichtigung der Symmetrie von $K'_x(x, y)$

$$-\int_0^l K(y, x)\, \xi'(y)\, dy = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{h_i^+}{\lambda_i^+} \frac{d\, \varphi_i^+(x)}{dx} +$$

$$+ \sum_{i=2}^{\infty} \frac{h_i^-}{\lambda_i^-} \frac{d\, \varphi_i^-(x)}{dx} + \int_{L+L'} \frac{h_\lambda}{\lambda} \frac{d\, \Phi^*(x, \lambda)}{dx}\, d\lambda. \tag{232}$$

Es gibt solche Konstanten $\varkappa_i^+$ und $\varkappa_i^-$, dass

$$\frac{d\, \varphi_i^+(x)}{dx} = \varkappa_i^+ \psi_i^-(x), \quad \frac{d\, \varphi_i^-(x)}{dx} = \varkappa_i^- \psi_i^+(x).$$

Aus der Relation

$$h_i^+ = \int_0^l h(x)\, \varphi_i^+(x)\, dx = \int_0^l \xi(x)\, \psi_i^+(x)\, dx = -$$

$$- \frac{1}{\varkappa_i^-} \int_0^l \varphi_i^-(x)\, \xi'(x)\, dx$$

folgt nun

$$\frac{h_i^+}{\lambda_i^+} \frac{d\, \varphi_i^+(x)}{dx} = \frac{\varkappa_i^+}{\varkappa_i^-} \frac{\psi_i^-(x)}{\lambda_i^-} g_i^-,$$

worin

$$g(x) = \xi'(x).$$

Wegen

$$\int_0^l \left(\varphi_i^+(x) \frac{d\varphi_i^-(x)}{dx} + \varphi_i^-(x) \frac{d\varphi_i^+(x)}{dx} \right) dx = 0$$

ergibt sich aus den Gleichungen

$$\frac{1}{\varkappa_i^+} \int_0^l \varphi_i^-(x) \frac{d\varphi_i^+(x)}{dx} dx = 1, \quad \frac{1}{\varkappa_i^-} \int_0^l \varphi_i^+(x) \frac{d\varphi_i^-(x)}{dx} = 1$$

$$\varkappa_i^+ + \varkappa_i^- = 0.$$

Also

$$\frac{h_i^+}{\lambda_i^+} \frac{d\varphi_i^+(x)}{dx} = -\frac{g_i^-}{\lambda_i^-} \psi_i^-(x).$$

Auf analoge Weise erhält man

$$\frac{h_i^-}{\lambda_i^-} \frac{d\varphi_i^-(x)}{dx} = -\frac{g_i^+}{\lambda_i^+} \psi_i^+(x).$$

Ferner haben wir, was mit Hilfe von (196) und (197) leicht bestätigt werden kann,

$$\int_{L+L'} \frac{h_\lambda}{\lambda} \frac{d\Phi^*(x,\lambda)}{dx} d\lambda = -\int_{L+L'} \frac{g_\lambda}{\lambda} \Phi^*(x,\lambda)\, d\lambda.$$

Es gilt also

$$(233) \qquad \int_0^l K(y,x)\, g(y)\, dy = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{g_i}{\lambda_i} \psi_i(x) + \int_{L+L'} \frac{g_\lambda}{\lambda} \Phi^*(x,\lambda)\, d\lambda,$$

falls sich $g(x)$ in der Gestalt

$$g(x) = \frac{d}{dx}\int_0^l \log \frac{R_0}{r_{xy}} h(y)\, dy$$

darstellen lässt. In diesem Falle ist $g_1 = 0$. Es ist leicht zu ersehen, dass (233) auch für Funktionen gültig bleibt von der Form

$$g(x) = c\,\psi_1(x) + \frac{d}{dx}\int_0^l \log \frac{R_0}{r_{xy}} h(y)\, dy \tag{234}$$

(c = Konstante), worin $\psi_1(x)$ die natürliche Belegung der Kurve C bedeutet.

Um Bedingungen zu finden, unter welchen eine beliebige Funktion die Darstellung (234) zulässt, brauchen wir den folgenden Satz: Sei $f(x)$ eine überall stetige für $x \neq x_1$ zweimal stetig differenzierbare Funktion, welche ausserdem in $x = x_1$ den Ungl.

$$|f'(x)| < C_1 |x - x_1|^{-\varkappa} \qquad 0 < \varkappa < 1$$

$$|f''(x)| < C_2 |x - x_1|^{-1-\varkappa}$$

genügt. Dann lässt sich die Integralgleichung

$$\int_0^l \log \frac{R_0}{r_{xy}} \varphi(y)\, dy = f(x)$$

durch eine für $x \neq x_1$ stetige, in der Nähe von $x = x_1$ der Bedingung

$$|\varphi(x)| < C_3 |x - x_1|^{-\varkappa_1} \qquad (0 < \varkappa_1 < 1)$$

genügende Funktion $\varphi(x)$ auflösen.

Zum Beweise betrachten wir das Potential der doppelten Schicht

$$W(p) = \int_C \frac{\partial \log \frac{1}{r_{pt}}}{\partial n_t} f(t)\, dt$$

und suchen mittelst einer bereits von LIAPOUNOFF angewandten Methode die normalen Ableitungen dieser Funktion. Sei $V(p)$ eine im Innern und auf der Begrenzung von C (ausser in x_1) zweimal stetig differenzierbare Funktion, welche auf C die Werte $f(x)$ annimmt. In der Nähe der Ecke P_1 definieren wir $V(p)$ bei Anwendung von Polarkoordinaten mit dem Aufpunkt in P_1, durch die Gleichung

$$V(p) = V(r,\theta) = \frac{(\theta_2(r) - \theta) f_1(r) + (\theta - \theta_1(r)) f_2(r)}{\theta_2(r) - \theta_1(r)},$$

worin

$$\theta = \theta_1(r), \qquad \theta = \theta_2(r)$$

die Gleichungen der beiden von P_1 ausgehenden Kurvenzüge sind. $f_i(r)$ ist gleich dem Wert der Randfunktion $f(x)$ im Punkte $(r, \theta_i(r))$. Setzt man in der Formel

$$\int_C \left(U \frac{dV}{dn} - V \frac{dU}{dn} \right) ds + \iint_C (U \Delta V - V \Delta U)\, dx\, dy = 0$$

$U(q) = \log \frac{1}{r_{pq}}$, so folgt

$$W(p) = 2\pi V(p) + \int_C \log \frac{1}{r_{pt}} \left(\frac{\partial V}{\partial n} \right)_i dt + \iint_C \log \frac{1}{r_{pq}} \Delta V\, d\sigma_q.$$

Hieraus findet man ohne Schwierigkeiten, dass $\left(\frac{\partial W}{\partial n} \right)_i$ existiert und eine für $x \neq x_1$ stetige Funktion $k(x)$ darstellt, welche in der Nähe von $x = x_1$ der Ungl.

$$|k(x)| < C_5 |x - x_1|^{-\varkappa}$$

genügt. Durch Anwendung der Resultate in § 2 lässt sich eine solche Funktion $\nu_1(x)$ bestimmen, dass die Normalableitung von

$$\int_C \log \frac{1}{r_{py}} \nu_1(y)\, dy$$

gleich $k(x)$ wird. Wir können ausserdem $\nu_1(x)$ so wählen, dass diese Funktion im Innern von C gleich $W(p)$ wird. Auf analoge Weise findet man, dass $W(p)$ auch im Aussenraume durch ein Potential der einfachen Schicht

$$\int_C \log \frac{1}{r_{py}} \nu_2(y)\, dy$$

dargestellt werden kann. Es gibt eine Zahl $\varkappa_1 < 1$, dass

$$|\nu_j(x)| < C_4 |x - x_1|^{-\varkappa_1} \qquad (j = 1,\ 2).$$

Wegen

$$W_i(s) - W_e(s) = 2\pi f(s)$$

folgt nun

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^l \log \frac{1}{r_{xy}} (\nu_1(y) - \nu_2(y))\, dy,$$

woraus sich unsre Behauptung ergibt.

Man findet nun leicht, dass jede stetig differenzierbare Funktion $g(x)$ sich in der Form (234) mit $c = \dfrac{\int_0^l g(x)\, dx}{\int_0^l \psi_1(x)\, dx}$ darstellen lässt.

Multiplizieren wir die Gl. (195) mit der durch die Integralgleichung

$$\int_0^l \log \frac{R_0}{r_{xz}} \Omega(z, y)\, dz = K(x, y)$$

definierten Funktion $\Omega(x, y)$, so ergibt sich nach Integration bezüglich x

$$\psi_p(x) = \lambda_p \int_0^l \Omega(y, x) \varphi_p(y)\, dy.$$

Auf analoge Weise folgt

$$\Psi^*(x, \lambda) = \lambda \int_0^l \Omega(y, x)\, \Phi^*(y, \lambda)\, dy.$$

Mit Hilfe dieser Gleichungen findet man, dass die Reihe und das Integral auf der rechten Seite von (233) absolut konvergieren, falls nur

$$\int_0^l \int_0^l \log \frac{R_0}{r_{xy}} |g(x)|\, |g(y)|\, dx\, dy$$

existiert. Da wir eine derartige Funktion $g(x)$ durch eine Folge stetig differenzierbarer Funktionen $g^{(n)}(x)$ auf solche Weise approximieren können, dass

$$\lim_{n=\infty} g_i^{(n)} = g_i$$

$$\lim_{n=\infty} g_\lambda^{(n)} \quad g_\lambda$$

$$\int_0^l \int_0^l \log \frac{R_0}{r_{xy}} g^{(n)}(x)\, g^{(n)}(y)\, dx\, dy < \int_0^l \int_0^l \log \frac{R_0}{r_{xy}} |g(x)|\, |g(y)|\, dx\, dy,$$

so ergibt sich durch Grenzübergang in der Formel

$$\int_0^l K(y, x)\, g^{(n)}(y)\, dy \quad \sum_{i=1}^{\infty} \frac{g_i^{(n)}}{\lambda_i} \psi_i(x) + \int_{L+L'} \frac{g_\lambda^{(n)} \Psi^*(x, \lambda)}{\lambda} \quad d\lambda$$

der folgende Satz: *Jede durch Vermittlung einer Funktion $g(x)$, für welche*

$$\int_0^l \int_0^l \log \frac{R_0}{r_{xy}} |g(x)|\, |g(y)|\, dx\, dy$$

konvergiert, in der Gestalt

$$\int_0^l K(y, x)\, g(y)\, dy$$

darstellbare Funktion besitzt die absolut konvergente Entwicklung

$$\int_0^l K(y, x)\, g(y)\, dy = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{g_i \psi_i(x)}{\lambda_i} + \int_{L+L'} \frac{g_\lambda \Psi^*(x, \lambda)}{\lambda}\, d\lambda.$$

Hieraus ergibt sich leicht, dass die Lösung der Gleichung (66) in der Form

$$\psi(x) = g(x) + \lambda \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \frac{g_i \psi_i(x)}{\lambda_i - \lambda} + \int_{L+L'} \frac{g_\mu \Psi^*(x, \mu)}{\mu - \lambda}\, d\mu \right\}$$

geschrieben werden kann.

Errata.

S. 5 Z. 4 lies: $\frac{d\tau}{dt}$ statt $\frac{d\tau}{dl}$.

» 11 » 15 ist »quadratische» zu streichen.

» 25 » 10 lies $|s-s_i|^{-\varkappa}$ statt $|s-s_i|^{\varkappa}$.

36 » 5 » $I_1' + I_2' + I_3'$ statt $I_2' + I_2' + I_2'$.

37 » 1 » $\frac{\varepsilon}{4}$ statt $\frac{\varepsilon}{2}$.

45 10 » $-\sum_1^N a_i^2$ statt $=\sum_1^N a_i^2$.

» 60 » 6 » $\int_0^b N(s,\tau)\,N(\tau,t\,/\,\lambda)\,d\tau$ statt $\int_0^b N(s,t)\,N(\tau,t\,/\,\lambda)\,d\tau$.

79 13 » $F_2(\varkappa)$ statt $F_2(u)$.

» 85 » 6 » $\int_0^{\infty}$ statt $\int_{-\infty}^{+\infty}$.

» 95 » 16 » $k(s)$ statt $\omega(s)$.

» 98 » 11 » $I[q(\lambda)]$ statt $q(\lambda)$.

» 98 » 21 » $R[q(\lambda)]$ statt $q(\lambda)$.

» 112 » 17 » $F_1(\varkappa)$ statt $F_3(\varkappa)$.

Inhaltsverzeichnis.

Seite

Einleitung III

Teil I.

§ 1. Potentialtheoretische Hilfssätze 1

§ 2. Die Randwertaufgabe $W_i(s) - W_e(s) - \lambda(W_i(s) + W_e(s)) = 2\pi f(s)$ 8

§ 3. Die dritte Randwertaufgabe 27

§ 4. Über die dreidimensionalen Randwertaufgaben 31

§ 5. Über ein Problem von Wärmegleichgewicht mit Strahlung 38

§ 6. Erweiterung eines Entwicklungssatzes von HILBERT . . . 41

Teil II.

§ 7. Lösung der Randwertaufgabe für ein Kreiszweieck . . . 47

§ 8. Die Integralgleichung

$$\mu(s) - \lambda \int_0^b [G(s,t) - G(2b-s,t)]\mu(t)\,dt = f(s) \quad \ldots \ldots \quad 57$$

§ 9. Vollständige Auflösung der Gleichung

$$\varphi(x) - \lambda \int_C \frac{\cos(n_y r_{yx})}{\pi r_{xy}} \varphi(y)\,dy = f(x)$$

für ein Gebiet mit einer Ecke 87

§ 10. Differentiallösungen 120

§ 11. Über symmetrisierbare Kerne 147

§ 12. Entwicklung willkürlicher Funktionen nach den Eigenfunktionen und Differentiallösungen des Kernes $K(x,y)$. 166